

TESIS DE MAESTRÍA

---

Funcionales de ocupación  
de procesos y campos gaussianos:  
desarrollo en caos de Wiener y  
teoremas centrales del límite

---

Juan Volpi

2025

Orientadores: Dr. Federico Dalmao y Dr. José R. León

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA  
PEDECIBA - UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



## Integrantes del tribunal de defensa de tesis

Dr. Diego Armentano

Dra. Hermine Biermé

Dr. Mauricio Velasco



## Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de funcionales no lineales de procesos y campos gaussianos estacionarios  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \in T}$ , donde  $T$  es un compacto de  $\mathbb{R}^d$ , de volumen  $|T|$ . Se consideran funcionales  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)$  obtenidos como límites casi seguros de integrales de la forma

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}}^{\delta}(T) = \int_T f_{\delta}(X(s), \nabla X(s), \nabla^2 X(s)) ds,$$

donde para cada  $\delta > 0$ ,  $f_{\delta}$  es tal que compuesta con el proceso y sus derivadas es cuadrado integrable respecto a cierta medida gaussiana. En el caso  $d = 1$  se estudian, el funcional  $L_t(x)$ , denominado *tiempo local* de  $\mathcal{X}$  de nivel  $x$  y tiempo  $t$  y también el funcional  $N_{[0,t]}(u)$ , denominado *número de cruces* de  $\mathcal{X}$  a nivel  $u$  en tiempo  $t$ . En el caso  $d > 1$ , bajo la hipótesis adicional de isotropía,  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$  está definido de forma tal que generaliza las definiciones de *característica de Euler modificada* e *integral de Euler modificada*, respectivamente presentadas en los artículos [6] y [2]. El enfoque aquí presentado se basa en: (1) la expansión en caos de Wiener, que permite representar estos funcionales como series de integrales múltiples ortogonales y analizar su comportamiento asintótico, cuando  $|T| \rightarrow \infty$ ; (2) el *teorema del cuarto momento* o *criterio de Nualart-Peccati* para el análisis del comportamiento límite en aproximaciones finito-dimensionales de una versión centrada de  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)$ , escalada por  $|T|^{-\frac{d}{2}}$ .

## Abstract

This work is devoted to the study of nonlinear functionals of stationary Gaussian processes and fields  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \in T}$ , where  $T$  is a compact subset of  $\mathbb{R}^d$  with volume  $|T|$ . We consider functionals  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)$  obtained as almost sure limits of integrals of the form

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}}^{\delta}(T) = \int_T f_{\delta}(X(s), \nabla X(s), \nabla^2 X(s)) ds,$$

where, for each  $\delta > 0$ ,  $f_{\delta}$ , when composed with the process and its derivatives, is square-integrable with respect to a suitable Gaussian measure. In the case  $d = 1$ , we study the functional  $L_t(x)$ , known as the *local time* of  $\mathcal{X}$  at level  $x$  up to time  $t$ , and the functional  $N_{[0,t]}(u)$ , referred to as the *number of level crossings* of  $\mathcal{X}$  at level  $u$  over the interval  $[0, t]$ . In the case  $d > 1$ , under the additional assumption of isotropy, the functional  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$  is defined in such a way as to generalize the notions of *modified Euler characteristic* and *modified Euler integral*, as presented in [6] and [2], respectively. The approach adopted here relies on: (1) the Wiener chaos expansion, which allows for the representation of these functionals as series of orthogonal multiple integrals and facilitates the analysis of their asymptotic behavior as  $|T| \rightarrow \infty$ ; and (2) the *Fourth Moment Theorem* or *Nualart-Peccati criterion*, for studying the limit behavior of finite-dimensional approximations of a centered and rescaled version of  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)$ , normalized by  $|T|^{-\frac{d}{2}}$ .



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>7</b>
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Procesos gaussianos estacionarios . . . . .	11
1.1.1. Espacios de Hilbert gaussianos y procesos gaussianos . . . . .	11
1.1.2. Procesos gaussianos: regularidad de las trayectorias y estacionariedad . . . . .	14
1.2. Integrales múltiples de Wiener-Itô y caos de Wiener . . . . .	17
1.2.1. Polinomios de Hermite . . . . .	17
1.2.2. Movimiento browniano . . . . .	21
1.2.3. Integral múltiple de Wiener-Itô . . . . .	23
1.2.4. Caos de Wiener . . . . .	25
1.3. Teorema de Wiener-Itô . . . . .	27
1.4. Fórmulas de Mehler . . . . .	31
1.5. Representaciones espectrales unidimensionales . . . . .	32
1.6. Preliminares sobre campos gaussianos . . . . .	35
1.7. Teorema del cuarto momento . . . . .	38
1.8. Rango de Hermite y desigualdad de Arcones . . . . .	39
<b>2. Funcionales de ocupación de procesos gaussianos estacionarios: tiempo local y número de cruces</b>	<b>41</b>
2.1. Tiempo local . . . . .	43
2.1.1. Introducción y fórmulas derivadas . . . . .	43
2.1.2. Expansión de Hermite del tiempo local . . . . .	48
2.2. Número de cruces a nivel $u$ . . . . .	50
2.2.1. Introducción y fórmulas derivadas . . . . .	50
2.2.2. Expansión de Hermite del número de cruces . . . . .	51
<b>3. Teorema central del límite para funcionales de ocupación de procesos gaussianos estacionarios</b>	<b>58</b>
3.1. TCL para el tiempo local . . . . .	58
3.1.1. Varianza límite . . . . .	58
3.1.2. Demostración del TCL para el tiempo local . . . . .	62
3.2. TCL para el número de cruces . . . . .	66
3.2.1. Varianza límite . . . . .	67
3.2.2. Demostración del TCL para el número de cruces . . . . .	71
<b>4. Funcionales de campos gaussianos estacionarios e isotrópicos: hacia una unificación de los artículos [2] y [6].</b>	<b>76</b>
4.1. El funcional $\mathcal{F}(T)$ . . . . .	76
4.1.1. Presentación del campo $\mathcal{X}$ . . . . .	76
4.1.2. Expansión de Hermite de $\mathcal{F}(T)$ . . . . .	78
4.2. Teorema central del límite para el funcional $\mathcal{F}(T)$ . . . . .	85
4.2.1. Varianza límite . . . . .	85

4.2.2. Demostración del TCL para el funcional $\mathcal{F}(T)$ . . . . .	90
<b>5. Apéndice</b>	<b>95</b>
5.1. Esperanza condicional y martingalas . . . . .	95
5.2. Métrica bounded Lipschitz . . . . .	97
5.3. Integrabilidad uniforme y teorema de convergencia de Vitali . . . . .	98
5.4. Construcción de la integral múltiple de Wiener-Itô en $[a, b]^q$ . . . . .	98
5.5. Obtención de una expansión de Hermite para el tiempo local . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>106</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>108</b>



# Introducción

Sea  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in T}$  un proceso gaussiano centrado y estacionario, con parámetro en un compacto  $T \subset \mathbb{R}^d$  y cuyas trayectorias verifican ciertas condiciones de regularidad impuestas a través de la función de covarianza de  $\mathcal{X}$ . El trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de ciertos funcionales  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)$  obtenidos como límites casi seguros, cuando  $\delta \rightarrow 0$ , de funcionales dados por integrales del tipo

$$\int_T f_{\delta}(X(s), \nabla X(s), \nabla^2 X(s)) ds,$$

donde para cada  $\delta > 0$ ,  $f_{\delta}$  es una función definida en un espacio euclídeo cuya composición con  $\mathcal{X}$  y algunas de sus derivadas es cuadrado integrable respecto a una medida gaussiana correspondiente. Estos funcionales, usualmente denominados *funcionales de ocupación* de  $\mathcal{X}$ , constituyen el principal objeto de interés de este trabajo. La herramienta fundamental que utilizaremos para su estudio será la expansión en caos de Wiener, la cual además de proporcionar una representación concreta y elegante, resulta especialmente apropiada para el análisis del comportamiento asintótico, cuando  $|T| \rightarrow \infty$ , de una versión centrada y convenientemente escalada, esto es, de un funcional de la forma

$$\zeta_{\mathcal{X}}(T) = \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T) - \mathbb{E}[\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T)]}{|T|^{d/2}},$$

donde  $T$  indica el volumen de  $T$ .

El procedimiento que seguiremos podría resumirse brevemente de la siguiente manera: a partir de la obtención de una expresión para la varianza  $\text{Var}(\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(T))$ , las propiedades de la función de covarianza del proceso permiten obtener un desarrollo explícito para la varianza asintótica de  $\zeta_{\mathcal{X}}(T)$ , es decir,  $\lim_{|T| \rightarrow \infty} \text{Var}(\zeta_{\mathcal{X}}(T))$ , que es finita. Luego, definiendo para cada  $N \in \mathbb{Z}^+$  la aproximación finito-dimensional

$$\zeta_{\mathcal{X}}^N(T) = \frac{1}{|T|^{d/2}} \int_T \sum_{n=1}^N c_n H_n(X(s)) ds,$$

donde  $H_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Hermite y  $c_n$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de Hermite de  $f$  (en general en dimensión mayor que  $d$ ), se demuestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{|T| \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ (\zeta_{\mathcal{X}}(T) - \zeta_{\mathcal{X}}^N(T))^2 \right] = 0.$$

Como consecuencia de este último resultado, se deduce que para establecer un Teorema Central del Límite (TCL) para  $\zeta_{\mathcal{X}}(T)$  será suficiente que obtengamos uno para  $\zeta_{\mathcal{X}}^N(T)$ . Este, a su vez, será consecuencia de una versión del clásico teorema de Breuer-Major ([17], Teorema 7.2.4) para funcionales no lineales de campos gaussianos, derivado en nuestro caso del célebre teorema del cuarto momento de Nourdin-Peccati y de una generalización al caso multivariado debida a Peccati-Tudor.

El trabajo está organizado del siguiente modo: en el Capítulo 1 se introducen los elementos preliminares necesarios para el desarrollo de los conceptos centrales que se presentarán a lo largo del texto. Aparecen aquí definiciones y resultados básicos sobre espacios de Hilbert gaussianos, polinomios de Hermite, integrales múltiples de Wiener-Itô y caos de Wiener. Se proporciona además una breve introducción a las representaciones espectrales, tanto de la función de covarianza como del proceso  $\mathcal{X}$  mismo. El capítulo finaliza con el enunciado del denominado *teorema del cuarto momento* (Nualart-Peccati) que será de gran importancia en la demostración de los tres TCL que se presentarán en capítulos posteriores. En el Capítulo 2 se definen y se obtienen

expansiones en caos de Wiener de dos funcionales de ocupación de un proceso gaussiano centrado y estacionario definido en  $[0, t]$ , a saber: el *tiempo local* a nivel  $x$  en tiempo  $t$  y el *número de cruces* en  $[0, t]$  a nivel  $u$ . Con adecuaciones, estos desarrollos están basados en la Proposición 1 de [9]. El Capítulo 3 está dedicado a la demostración de un TCL para cada uno de los funcionales analizados en el capítulo anterior. El Capítulo 4 está dedicado al análisis de campos gaussianos centrados e isotrópicos definidos en ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ . La estrategia de demostración reproduce en líneas generales los argumentos desarrollados en dimensión uno, adaptados a la geometría del dominio y a la estructura de dependencia propia del caso multidimensional. Se hace uso, nuevamente, de la expansión en caos de Wiener y de un criterio de convergencia en distribución basado en el teorema de Peccati-Tudor anteriormente citado. Finalmente, el Capítulo 5 contiene una serie de resultados complementarios organizados en forma de apéndice.

Creemos conveniente señalar que a lo largo del trabajo se incorporan enfoques que no se encuentran explícitamente en la bibliografía consultada, la cual incluye referencias estándar en la materia. Estas reformulaciones tienen como objetivo introducir argumentaciones diferentes a las presentadas en dichas fuentes. En este sentido, si bien muchos de los resultados principales están inspirados en trabajos reconocidos, existen pasajes en los que la exposición adopta un enfoque propio, orientado a complementar distintas ideas presentes en la literatura especializada.

Destacamos también que este trabajo constituye la síntesis de un proceso de formación y se ha buscado explícitamente que esa característica esté reflejada en su desarrollo, no solo abarcando el dominio técnico de los temas abordados, sino también el recorrido conceptual que los acompaña. Con ese espíritu, se ha prestado especial atención a la exposición detallada de ciertos argumentos, aun cuando en algunas ocasiones el nivel de detalles expuesto pudiera parecer superior al habitual en este tipo de trabajos.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Procesos gaussianos estacionarios

#### 1.1.1. Espacios de Hilbert gaussianos y procesos gaussianos

En lo que sigue consideraremos fijo un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Definición 1.1.1.** Una variable *gaussiana* o *normal* es una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cuya función característica es de la forma  $f_X(x) = e^{i\mu x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$ , siendo  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 \geq 0$ . Se dice que  $X$  es *centrada* si  $\mu = 0$  y *estándar* en caso de que se verifique  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ . En caso de que sea  $\sigma^2 = 0$ , se dice que  $X$  es *degenerada*.

En cualquier caso, se tiene que  $\mathbb{E}(X) = \mu$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ . A la función de densidad de la variable gaussiana estándar la simbolizaremos con  $\phi$ , esto es,  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.2.** Decimos que un vector aleatorio  $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es gaussiano si la variable aleatoria  $\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$  es gaussiana, para todo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Equivalentemente,  $X$  es gaussiano si las componentes  $X_1, \dots, X_n$  tienen distribución normal conjunta.

**Definición 1.1.3.** Se dice que una familia  $\mathcal{F}$  (posiblemente infinita) de variables aleatorias tiene distribución gaussiana conjunta, si para cada subconjunto finito  $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathcal{F}$ , se verifica que el vector  $(X_1, \dots, X_n)$  es gaussiano.

Simbolizaremos con  $\phi_d$  a la densidad gaussiana estándar  $d$ -dimensional, es decir,  $\phi_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2}x^\top x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.1.4.** Llamaremos *espacio gaussiano* a todo subespacio de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  cuyos elementos sean variables gaussianas centradas. Llamaremos *espacio de Hilbert gaussiano* a todo espacio gaussiano completo.

Naturalmente, todo espacio de Hilbert gaussiano es un subespacio cerrado de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Se tiene además los siguientes importantes resultados, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [8].

**Lema 1.1.5.** Sea  $(X_n)_{n \geq 0}$  una sucesión de variables gaussianas tal que para cada  $n$ , se tiene  $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ . Si  $X_n \rightarrow X$  en  $L^2(\Omega)$ , entonces  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , siendo  $\mu = \lim \mu_n$  y  $\sigma^2 = \lim \sigma_n^2$ .

Inmediatamente se obtiene,

**Proposición 1.1.6.** Si  $\mathcal{G}$  es un espacio gaussiano, entonces  $\overline{\mathcal{G}}$ , la clausura de  $\mathcal{G}$  en  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , es un espacio de Hilbert gaussiano.

**Proposición 1.1.7.** *Todas las topologías de los espacios  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , con  $1 \leq p < \infty$ , coinciden en  $\mathcal{G}$  y además coinciden con la topología de la convergencia en probabilidad. Más aún, la clausura de  $\mathcal{G}$  en cada espacio  $L^p$  coincide con  $\overline{\mathcal{G}}$ . Esto implica que cada espacio de Hilbert gaussiano es un subespacio cerrado de cada  $L^p$ .*

**Proposición 1.1.8.** *Cualquier subconjunto de un espacio gaussiano tiene distribución gaussiana conjunta.*

De particular interés resultan las familias  $\mathcal{F} = \{X_i : i \in I\}$ , donde  $I$  es un conjunto arbitrario de índices y para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  es una variable gaussiana centrada. Claramente el subespacio  $\mathcal{G} = \text{span}(\mathcal{F})$  es un espacio gaussiano y, de acuerdo a la Proposición 1.1.6, su clausura  $\overline{\mathcal{G}}$  en  $L^2$  es un espacio de Hilbert gaussiano. A este espacio lo llamaremos espacio de Hilbert gaussiano *generado* por  $\mathcal{F}$ . Los procesos gaussianos son un caso particular del tipo de familias como la descrita anteriormente y son el objeto principal de estudio del presente trabajo.

En lo que sigue, si  $A$  es un espacio topológico, simbolizaremos con  $\mathcal{B}_A$  a la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $A$ .

**Definición 1.1.9.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $T$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ . Un *proceso estocástico* es una función medible  $X : (T \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ .

De la anterior definición se deducen

1. Para cada  $s \in T$ ,  $X(s, \cdot)$  es una variable aleatoria.
2. Para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\cdot, \omega) : (T, \mathcal{B}_T) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  es una función medible. A cada una de estas funciones las llamamos *trayectoria* del proceso estocástico.

Como es usual, escribiremos  $X(s)$  para hacer referencia a  $X(s, \omega)$ , salvo en aquellas situaciones en las que la dependencia de la segunda variable resulte relevante.

**Definición 1.1.10.** Sea  $T \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto no vacío. Se dice que un proceso estocástico  $(X(s))_{s \in T}$ , a valores reales, definido en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  es *gaussiano*, si para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  y cada  $(s_1, \dots, s_n) \in T^n$ , se verifica que el vector  $(X(s_1), \dots, X(s_n))$  es gaussiano. Se dice que el campo complejo  $X(t) = X_R(t) + iX_I(t)$  es gaussiano si sus partes real  $X_R$  e imaginaria  $X_I$  lo son, en el sentido real.

A lo largo de este trabajo lo usual será que empleemos el término *proceso gaussiano* para el caso  $T = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$  y reservemos el término *campo gaussiano* para el caso  $T \subset \mathbb{R}^d$ , con  $d > 1$ . Una generalización de estos conceptos será presentada posteriormente (ver Definición 1.6.1). De acuerdo a lo visto antes, si  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \in T}$  es como en la definición anterior y si  $\mathbb{E}(X(s)) = 0$ , para cada  $s \in T$ , entonces la clausura de  $\text{span}\{X(s) : s \in T\}$  en  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  es un espacio de Hilbert gaussiano.

**Definición 1.1.11.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real separable con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ . Llamamos *proceso gaussiano isonormal* sobre  $\mathcal{H}$  a un espacio gaussiano  $\mathcal{X} = \{X(h) : h \in \mathcal{H}\}$  de forma que se verifique

$$\mathbb{E}(X(h)X(h')) = \langle h, h' \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (1.1)$$

para todos  $h, h' \in \mathcal{H}$ .

**Proposición 1.1.12.** *El mapa  $h \mapsto X(h)$  es lineal.*

*Demostración.* Sean  $h, g \in \mathcal{H}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sea

$$Y = X(\alpha h + \beta g) - (\alpha X(h) + \beta X(g)).$$

Es claro que  $Y$  es una variable gaussiana centrada. Además, usando la condición (1.1), con las operaciones habituales se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \|\alpha h + \beta g\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\alpha \langle \alpha h + \beta g, h \rangle_{\mathcal{H}} - 2\beta \langle \alpha h + \beta g, g \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\alpha^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\alpha\beta \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}} + \beta^2 \|g\|_{\mathcal{H}}^2).\end{aligned}$$

Basta realizar algunas simplificaciones sencillas para obtener  $\mathbb{E}(Y^2) = 0$ . Luego, al ser  $Y$  gaussiana centrada, resulta que con probabilidad 1,  $Y = 0$ , de donde se deduce lo que se quería demostrar.  $\square$

Del resultado anterior se deduce que  $h \mapsto X(h)$  es una isometría de  $\mathcal{H}$  en un espacio de Hilbert gaussiano. Este aspecto será recurrente en capítulos posteriores.

**Proposición 1.1.13.** *Dado un espacio de Hilbert real separable, existe un proceso isonormal  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{H}$ .*

Si  $\{e_n : n \geq 1\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  y  $\{Z_n : n \geq 1\}$  es una familia de variables gaussianas iid con distribución  $N(0, 1)$ , el proceso  $\mathcal{X}$  al que refiere la Proposición 1.1.13 puede definirse como  $X(h) = \sum_{n \geq 1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} Z_n$ . La sencilla demostración de este resultado puede consultarse en [17].

**Ejemplo 1.1.14.** Sea  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ , con  $d \geq 1$ . Simbolicemos con  $\{e_1, \dots, e_d\}$  a su base canónica y consideremos para cada  $1 \leq i \leq d$ , una variable  $Z_i \sim N(0, 1)$ . Si  $t = \sum_{i=1}^d t_i e_i \in \mathbb{R}^d$ , se define  $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$  tal que  $X(t) = \sum_{i=1}^d t_i Z_i$ . Se obtiene así que  $\mathcal{X}$  es un proceso isonormal sobre  $\mathbb{R}^d$ .

Consideremos ahora que  $\mathcal{X}$  es un proceso gaussiano isonormal y supongamos además que  $\mathcal{H}$  es de la forma  $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ , donde  $(T, \mathcal{B})$  es un espacio medible cualquiera y  $\mu$  es una medida  $\sigma$ -finita no atómica. Para cada  $A \in \mathcal{B}$  con  $\mu(A) < \infty$ , sea  $\tilde{X}(A) := X(\mathbf{1}_A)$ . Puede extenderse  $\tilde{X}$  a una medida definida en  $(T, \mathcal{B})$  y a valores en  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{X}(A)\tilde{X}(B)) &= \mathbb{E}(X(\mathbf{1}_A)X(\mathbf{1}_B)) \\ &= \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{L^2(T, \mathcal{B}, \mu)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

lo que indica que  $\tilde{X}$  toma valores independientes en cualquier familia disjunta de subconjuntos medibles de  $T$ . Con un razonamiento similar se obtiene que cada variable aleatoria  $\tilde{X}(A)$  es gaussiana centrada con varianza  $\mu(A)$ , si  $\mu(A) < \infty$ .

**Definición 1.1.15.** La medida  $\tilde{X}$  es llamada *medida gaussiana* a valores en  $L^2(\Omega)$  definida en  $(T, \mathcal{B})$ . También se denomina *ruido blanco* basado en la medida  $\mu$ .

**Observación 1.1.16.** Las siguientes propiedades caracterizan a la medida gaussiana  $\tilde{X}$ . Si  $A, B \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(A) < \infty$  y  $\mu(B) < \infty$ , entonces

1.  $\tilde{X}(A) \sim N(0, \mu(A))$ ,
2.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \tilde{X}(A \cup B) = \tilde{X}(A) + \tilde{X}(B)$ , c.s.
3.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{X}(A)\tilde{X}(B)) = 0$ .

**Ejemplo 1.1.17.** Veamos el caso  $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{L}, m)$ , donde  $T = [0, +\infty)$ ,  $\mathcal{L}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue y  $m$  la medida de Lebesgue, ambas en  $T$ . Diremos en este caso que  $\tilde{X}$  es una *medida browniana*. Para  $t \geq 0$  podemos construir el proceso  $B(t) = \tilde{X}([0, t])$  isonormal sobre  $\mathcal{H}$ . De la linealidad del mapa  $t \mapsto X(t)$  se deduce que si  $0 \leq s \leq t$ , entonces  $B(t) - B(s) = \tilde{X}([s, t]) \sim N(0, t - s)$  y también que  $P(B(0) = 0) = 1$ . Además, si

$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  y  $h \neq j$ , entonces por la anteriormente referida independencia sobre conjuntos disjuntos se obtiene  $\mathbb{E}[(B(t_h) - B(t_{h-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))] = 0$ . A una versión de este proceso con trayectorias casi seguramente continuas la denominamos *movimiento browniano estándar* en  $[0, +\infty)$ . Ver Definición 1.2.6.

Para finalizar esta subsección, veamos un resultado que es central en la teoría de los procesos gaussianos. Se trata de la desigualdad de Borell-Tsirelson-Ibragimov-Sudakov. Su demostración y notables consecuencias pueden encontrarse en el Capítulo 2 de [1].

**Proposición 1.1.18.** Sea  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in T}$  un campo gaussiano centrado, casi seguramente acotado en  $T$ . Sean

$$X_{\sup} := \sup_{t \in T} |X(t)| \quad y \quad \sigma_T^2 := \sup_{t \in T} \mathbb{E}(X(t)^2).$$

Entonces,  $\mathbb{E}(X_{\sup}) < \infty$  y, para todo  $u > 0$ ,

$$P(X_{\sup} - \mathbb{E}(X_{\sup}) > u) \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}.$$

En particular, si  $u > \mathbb{E}(X_{\sup})$ , entonces

$$P(X_{\sup} > u) \leq e^{-\frac{(u - \mathbb{E}(X_{\sup}))^2}{2\sigma_T^2}}.$$

Vale aquí la aclaración de que si bien para nuestros propósitos es suficiente con considerar que  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ , el Teorema 1.1.18 es válido en el contexto general en el que  $T$  es un espacio topológico arbitrario.

### 1.1.2. Procesos gaussianos: regularidad de las trayectorias y estacionariedad

Si  $\mathcal{X}$  es un proceso gaussiano centrado, a la función  $r : [0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $r(s, t) = \mathbb{E}(X(s)X(t))$ , la llamamos *función de covarianza* de  $\mathcal{X}$ . La función  $r$  es simétrica y además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que  $|r(s, t)| \leq \mathbb{E}(|X(s)|^2) \mathbb{E}(|X(t)|^2) < \infty$ .

**Definición 1.1.19.** Diremos que el proceso  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  es *continuo en probabilidad* en  $s_0 \geq 0$  si  $X(s) \rightarrow X(s_0)$ , en probabilidad, si  $s \rightarrow s_0$ .

**Definición 1.1.20.** Diremos que el proceso  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  en  $L^2(\Omega)$  es *continuo en media cuadrática* en  $s_0 \geq 0$ , si  $X(s) \rightarrow X(s_0)$  en  $L^2(\Omega)$ , si  $s \rightarrow s_0$ .

**Proposición 1.1.21.** Si  $(X(s))_{s \geq 0}$  un proceso gaussiano centrado, entonces son equivalentes:

- i. El mapa  $s \mapsto X(s)$  es continuo en probabilidad.
- ii. El mapa  $s \mapsto X(s)$  es continuo en  $L^2(\Omega)$ .
- iii. La función de covarianza  $r : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

*Demostración.*

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Como consecuencia de la desigualdad de Chebyshev, convergencia en  $L^2$  implica convergencia en probabilidad. Recíprocamente, si  $X(n) \xrightarrow{P} X$ , entonces  $X(n) - X(m) \xrightarrow{P} 0$  si  $m, n \rightarrow \infty$ . Pero las variables  $X(m) - X(n)$  son gaussianas y se cumple que  $\|X(n) - X(m)\|_{L^2} \rightarrow 0$ , de donde  $\{X(n)\}_n$  es de Cauchy en  $L^2$  y la sucesión converge en  $L^2$  a cierto límite. Ese límite debe ser  $X$ .
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Como  $r(s, t) = \langle X(s), X(t) \rangle$  siendo el anterior el producto interno en el espacio de Hilbert gaussiano (inducido) por el proceso, el resultado se deduce de la continuidad del referido producto interno.

- (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Consideremos la pseudo-métrica  $d : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $d(s, t) = \|X(s) - X(t)\|_{L^2}$ . Por la denominada *identidad de polarización*, se verifica

$$d^2(s, t) = r(s, s) + r(t, t) - 2r(s, t)$$

y por lo tanto, de la continuidad de  $r$  se deduce la continuidad de  $d$ . Por ser  $d$  continua, es continua por separado en cada componente del producto  $[0, \infty)^2$ . Si  $t \in [0, \infty)$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un entorno  $V_\varepsilon(t)$  tal que  $d(s, t) = |d(s, t) - d(t, t)| < \varepsilon$ , para todo  $s \in V_\varepsilon(t)$ . Como  $d(t, t) = 0$ , lo anterior implica que  $\|X(s) - X(t)\|_2 < \varepsilon$ , de donde se deduce (ii).

□

**Definición 1.1.22.** Diremos que el proceso  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  en  $L^2(\Omega)$  es *diferenciable en media cuadrática* en  $s_0 \geq 0$ , con derivada  $X'(s_0)$ , si  $\frac{X(s_0+h) - X(s_0)}{h} \rightarrow X'(s_0)$  en  $L^2(\Omega)$ , si  $h \rightarrow 0$ .

**Observación 1.1.23.** De la definición anterior se deducen algunos hechos casi inmediatamente. En primer lugar observemos que si un cierto proceso  $X(s)$  tiene derivada en media cuadrática para todo  $s$  en un intervalo  $I$  y, casi seguramente, sus trayectorias son diferenciables en el sentido usual, entonces para cada  $s \in I$  el cociente  $\frac{X(s+h) - X(s)}{h}$  converge tanto en  $L^2(\Omega)$  como casi seguramente, si  $h \rightarrow 0$ . En ese caso, ambas derivadas coinciden casi seguramente. Por otra parte, como los espacios de Hilbert gaussianos son subespacios cerrados de  $L^2(\Omega)$ , si un proceso gaussiano es derivable en media cuadrática, entonces su derivada en media cuadrática es un proceso gaussiano.

**Proposición 1.1.24.** Si  $s_0 \geq 0$  y existe  $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}(s_0, s_0)$ , entonces  $\mathcal{X}$  es derivable en media cuadrática en  $s_0$ .

*Demostración.* Mediante cálculos elementales se obtiene

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}(s_0, s_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(s_0 + h, s_0 + k) - r(s_0 + h, s_0) - r(s_0, s_0 + k) + r(s_0, s_0)}{hk}.$$

Sean  $(h_n)_n$  y  $(k_m)_m$  sucesiones reales, ambas convergentes a 0, con  $h_n, k_m \neq 0$ , para todos  $m, n$ . Fijados  $m$  y  $n$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{X(s_0 + h_n) - X(s_0)}{h_n} \cdot \frac{X(s_0 + k_m) - X(s_0)}{k_m} \right) \\ = \frac{r(s_0 + h_n, s_0 + k_m) - r(s_0 + h_n, s_0) - r(s_0, s_0 + k_m) + r(s_0, s_0)}{h_n k_m}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, resulta

$$\mathbb{E} \left( \frac{X(s_0 + h_n) - X(s_0)}{h_n} \cdot \frac{X(s_0 + k_m) - X(s_0)}{k_m} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}(s_0, s_0),$$

si  $m, n \rightarrow +\infty$ . Definimos ahora  $S_n = \frac{X(s_0 + x_n) - X(s_0)}{x_n}$ , con  $x_n \rightarrow 0$ . La prueba quedará concluida si se verifica que la sucesión  $(S_n)$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . A partir de lo ya obtenido, al escribir

$$\mathbb{E} \left( (S_m - S_n)^2 \right) = \mathbb{E} (S_m^2) - 2\mathbb{E} (S_m S_n) + \mathbb{E} (S_n^2),$$

se observa que cada una de las esperanzas en el segundo miembro de la igualdad anterior tiende a  $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}(s_0, s_0)$ , si  $m, n \rightarrow +\infty$ , por lo que  $\mathbb{E} \left( (S_m - S_n)^2 \right) \rightarrow 0$ .

□

Nuestros objetos centrales de estudio están fuertemente vinculados con procesos gaussianos cuyas características de interés se mantienen invariantes mediante una traslación temporal. Los definimos a continuación.

**Definición 1.1.25.** Diremos que el proceso  $(X(s))_{s \geq 0}$  es *estacionario*<sup>1</sup> si la colección de sus distribuciones finito-dimensionales son invariantes por traslaciones en el parámetro  $s$ . Esto equivale a decir que para cualesquiera  $s_1, \dots, s_n \in [0, \infty)$ , la distribución conjunta de las variables  $X(s_1 + \delta), \dots, X(s_n + \delta)$  es independiente de  $\delta$ .

En un proceso estacionario, cualquier característica de la distribución conjunta antes mencionada es independiente de  $\delta$ . Particularmente esto vale para los momentos, si estos existen. De acuerdo a lo anterior, si la esperanza  $\mathbb{E}(X(s))$  existe, debe ser igual a  $\mathbb{E}(X(s + \delta))$  para todo  $\delta$ , por lo que será una constante independiente de  $s$ , la que podemos asumir que es 0. Por otra parte, si la función de covarianza existe, se tiene que

$$r(s, t) = \mathbb{E}(X(s)X(t)) = \mathbb{E}(X(s + \delta)X(t + \delta))$$

para todo  $s, t, \delta$ . En particular, si  $\delta = -t$  resulta

$$r(s, t) = \mathbb{E}(X(s - t)X(0))$$

por lo que  $r$  es una función de la diferencia  $s - t$ . A esta nueva función univariada  $r(s)$  la llamaremos *función de covarianza* del proceso estacionario  $\mathcal{X}$ . Observemos que esta función de covarianza está definida en todo  $\mathbb{R}$  y además  $r(s) = r(-s)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Además, como la varianza es independiente de  $s$ , resulta

$$\mathbb{E}(|X(s)|^2) = \mathbb{E}(|X(0)|^2) = r(0).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos además que para todos  $s, t$  se verifica

$$|\mathbb{E}(X(s)X(t))|^2 \leq \mathbb{E}(|X(s)|^2)\mathbb{E}(|X(t)|^2),$$

de donde se deduce que  $|r(s)| \leq r(0)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Exploremos brevemente la relación existente entre la regularidad de las trayectorias de un proceso gaussiano estacionario y la derivabilidad de su función de covarianza. De la Proposición 1.1.21 se deduce que el proceso gaussiano estacionario  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  es continuo en media cuadrática si y solo si su función de covarianza  $r$  es continua en 0. Por otra parte, de acuerdo a la Proposición 1.1.24, la existencia de la derivada segunda de  $r$  en 0 alcanza para que el proceso sea derivable en media cuadrática en todo  $s \geq 0$ .

**Definición 1.1.26.** Diremos que dos procesos estocásticos  $(X(s))_{s \geq 0}$  y  $(Y(s))_{s \geq 0}$  son *equivalentes* si para cada  $s \geq 0$  se verifica que  $X(s) = Y(s)$ , casi seguramente.

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en la sección 1.4 de [4].

**Proposición 1.1.27.** Sea  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  un proceso gaussiano estacionario centrado con función de covarianza  $r$ . Entonces,

1. Si

$$r(0) - r(s) \leq \frac{C}{|\log |s||^\alpha},$$

para  $|s|$  suficientemente pequeño,  $C > 0$  y  $\alpha > 3$ , entonces,  $\mathcal{X}$  es equivalente a un proceso con trayectorias que casi seguramente son continuas en cualquier intervalo acotado.

2. Si

$$r(s) = r(0) - \frac{1}{2}\lambda s^2 + O\left(\frac{s^2}{|\log |s||^\alpha}\right),$$

si  $s \rightarrow 0$ , con  $\lambda > 0$  y  $\alpha > 3$ , entonces,  $\mathcal{X}$  es equivalente a un proceso con trayectorias que casi seguramente son de clase  $C^1$  en cualquier intervalo acotado.

---

<sup>1</sup>En un contexto más general, esta definición corresponde al concepto de *estrictamente estacionario*.



**Corolario 1.1.28.** Si existe  $r''(0)$ , entonces  $\mathcal{X}$  es equivalente a un proceso cuyas trayectorias, casi seguramente, son continuas en todo intervalo acotado. Si existe  $r^{(iv)}(0)$ , entonces  $\mathcal{X}$  es equivalente a un proceso con trayectorias cuyas derivadas, casi seguramente, son continuas en todo intervalo acotado.

**Observación 1.1.29.** Supongamos que la función de covarianza de  $\mathcal{X}$  satisface  $r^{(iv)}(0) < \infty$ . En este caso,  $X'(s)$  puede interpretarse tanto como derivada en media cuadrática como en el sentido usual, con probabilidad 1. El proceso  $X'(s)$  es estacionario, lo que puede deducirse de forma inmediata de la Definición 1.1.22. Simbolicemos con  $r_{X'}$  a su función de covarianza. A partir de la expresión  $r(s) = \mathbb{E}(X(s)X(0))$ , al verificar que se cumplen las condiciones que posibilitan la derivación bajo el signo de integral, resulta

$$\begin{aligned} r'(s) &= \frac{d}{ds} \mathbb{E}(X(s)X(0)) \\ &= \mathbb{E}(X'(s)X(0)). \end{aligned}$$

En particular, por ser  $r$  una función par derivable en 0 resulta  $0 = r'(0) = \mathbb{E}(X'(0)X(0))$ , de donde se deduce que si  $g$  y  $h$  son funciones medibles, entonces

$$\mathbb{E}(g(X(s))h(X'(s))) = \mathbb{E}(g(X(s))) \mathbb{E}(h(X'(s))), \quad (1.2)$$

para todo  $s \geq 0$ . Veamos por otra parte que  $r(t-s) = \mathbb{E}(X(s)X(t))$ . Luego,

$$\left. \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s}(t-s) \right|_{s=0} = \mathbb{E}(X'(s)X'(t)) \Big|_{s=0}$$

y entonces  $-r''(s) = \mathbb{E}(X'(s)X'(0))$ . Obtenemos así que  $r_{X'} = -r''$ , es decir, la función de covarianza del proceso  $X'(s)$  coincide con la opuesta de la segunda derivada de la función de covarianza de  $X(s)$ .

## 1.2. Integrales múltiples de Wiener-Itô y caos de Wiener

### 1.2.1. Polinomios de Hermite

Veremos en capítulos posteriores que los polinomios de Hermite son ubicuos en el desarrollo de las ideas centrales del presente trabajo. Lo frecuente es encontrar dos alternativas para su definición. A saber:

1. A través de la *fórmula de Rodrigues*: para  $n \geq 0$ , el polinomio de Hermite de grado  $n$  es dado por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (1.3)$$

si  $n \geq 1$  y  $H_0(x) = 1$ .

2. A través de su función generatriz:

$$e^{sx - \frac{x^2}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n}{n!} H_n(x). \quad (1.4)$$

Los primeros polinomios de Hermite son:

- $H_0(x) = 1.$
- $H_1(x) = x.$
- $H_2(x) = x^2 - 1.$
- $H_3(x) = x^3 - 3x.$
- $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$
- $H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x.$
- $H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$

Siguiendo las ideas desarrolladas en [15], optamos por presentar aquí un desarrollo constructivo de los polinomios de Hermite. Consideremos el espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \phi(x) dx)$ . En  $L^2(\phi(x) dx)$ , al aplicarle el método

de ortogonalización de Gram-Schmidt a la sucesión de monomios  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ , se obtiene una sucesión de polinomios ortogonales  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ , donde cada  $P_n$  puede ser elegido mónico. Consideremos por otra parte la función  $\theta(s, x) = e^{sx}$ . Simbolizando con  $\tilde{\mathbb{E}}$  a la esperanza de  $\theta(s, \cdot)$  respecto a la medida gaussiana estándar., se tiene

$$\tilde{\mathbb{E}}(\theta(s, \cdot)) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Definamos además,

$$\psi(s, x) = \frac{\theta(s, x)}{\tilde{\mathbb{E}}(\theta(s, \cdot))} = e^{sx - \frac{s^2}{2}}. \quad (1.5)$$

Podemos expandir  $\psi$  en serie de potencias en  $s$  y obtener

$$e^{sx - \frac{s^2}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} s^n, \quad (1.6)$$

donde los  $H_n(x)$  son coeficientes a determinar, lo que haremos a continuación. Para eso consideremos el desarrollo en serie de la función exponencial.

$$\begin{aligned} e^{sx - \frac{s^2}{2}} &= e^{sx} e^{-\frac{s^2}{2}} \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} s^n \right) \left( \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m! 2^m} s^{2m} \right) \end{aligned}$$

Al multiplicar las sumas entre paréntesis, se obtiene que el coeficiente de  $s^n$  en ese desarrollo es

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \frac{(-1)^k}{k! 2^k}.$$

En (1.6), el coeficiente de  $s^n$  es  $H_n(x)/n!$ . Luego,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! k! 2^k} (-1)^k x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (-1)^k x^{n-2k}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Definición 1.2.1.** Al polinomio  $H_n(x)$  en (1.7) lo llamamos *polinomio de Hermite* de grado  $n$ .

Observamos que, independientemente de la obtención de coeficientes explícitos para cada polinomio de Hermite, la expresión (1.4) apareció naturalmente en el desarrollo hecho antes. Naturalmente, también puede obtenerse (1.3) trabajando con (1.7).

El siguiente resultado nos da una primera idea de la importancia de los polinomios de Hermite.

**Proposición 1.2.2.** La familia  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n : n \geq 0 \right\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\phi(x) dx)$ .

*Demostración.* Comencemos probando la ortogonalidad. Si  $s, t \in \mathbb{R}$ , por (1.6) se cumple que

$$\begin{aligned}\psi(t, x)\psi(s, x) &= e^{(t+s)x - \frac{1}{2}(t^2+s^2)} \\ &= \sum_{n, m \geq 0} \frac{t^n s^m}{n!m!} H_n(x)H_m(x).\end{aligned}\tag{1.8}$$

A partir de (1.5), integrando respecto a la medida gaussiana el primer miembro de (1.8), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, x)\psi(s, x)\phi(x) dx &= e^{-\frac{1}{2}(t^2+s^2)} e^{\frac{1}{2}(t+s)^2} \\ &= e^{st}.\end{aligned}$$

Luego<sup>2</sup>,

$$e^{st} = \sum_{n, m \geq 0} \frac{t^n s^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\phi(x) dx.\tag{1.9}$$

Observemos que el primer miembro de (1.9) depende del producto  $st$ , por lo que el coeficiente de  $s^n t^m$  en el segundo miembro debe ser 0, si  $n \neq m$ . Concluimos que  $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\phi(x) dx = 0$ , para todos  $n \neq m$ . De acuerdo a lo probado, volviendo a la ecuación (1.9) obtenemos

$$e^{st} = \sum_{n \geq 0} \frac{(st)^n}{(n!)^2} \|H_n\|_{L^2(\phi(x)dx)}^2.$$

Si consideramos la expansión en serie de potencias,

$$e^{st} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (st)^n.$$

Se obtiene entonces

$$\|H_n\|_{L^2(\phi(x)dx)}^2 = n!,\tag{1.10}$$

para todo  $n \geq 0$ .

Para concluir, resta probar que este conjunto ortonormal es total. Alcanza con probar que si  $f \in L^2(\phi(x)dx)$  es una función tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k \phi(x) dx = 0$  para todo  $k \geq 0$ , entonces  $f = 0$ , casi seguramente. Sea entonces  $f \in L^2(\phi(x)dx)$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

para todo  $k \geq 0$ . Fijado  $t \in \mathbb{R}$ , multiplicando cada miembro de la igualdad anterior por  $\frac{(is)^k}{k!}$  y sumando sobre  $k$  de 0 a  $n$ , se obtiene

$$\sum_{k=0}^n \frac{(is)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(isx)^k}{k!} dx = 0.$$

Como para cada  $x \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$\left| f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(isx)^k}{k!} \right| \leq |f(x)|e^{|sx| - \frac{x^2}{2}},$$

por convergencia dominada resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\phi(x) dx = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{(is)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k \phi(x) dx = 0.$$

---

<sup>2</sup>Hemos obviado aquí la justificación del intercambio entre suma y serie, la que puede obtenerse como consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Queda así probado que la función característica de  $f$  es idénticamente nula y esto alcanza para probar que  $f = 0$  casi seguramente, con lo que se concluye la prueba. □

**Corolario 1.2.3.** *Toda  $f \in L^2(\phi(x) dx)$  tiene expansión*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n H_n(x),$$

donde

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) \phi(x) dx, \quad (1.11)$$

para todo  $n \geq 0$ . Como consecuencia,

$$\|f\|_{L^2(\phi(x) dx)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! c_n^2. \quad (1.12)$$

La siguiente proposición destaca algunas propiedades de los polinomios de Hermite.

**Proposición 1.2.4.** *Se verifican las siguientes identidades:*

1.

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \quad (1.13)$$

2.

$$H_n(x)H_m(x) = \sum_{k=0}^{n \wedge m} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} H_{n+m-2k}(x). \quad (1.14)$$

3.

$$x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! H_{n-2k}(x). \quad (1.15)$$

4.

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x). \quad (1.16)$$

Finalizamos este apartado con la extensión de los polinomios de Hermite a  $n$  variables. Para cada  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n = \{0, 1, 2, \dots\}^n$  y cada  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se define

$$\tilde{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{h=1}^n H_{k_h}(x_h).$$

Es claro que  $\tilde{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  es un polinomio de grado  $k_1 + \dots + k_n$  en  $n$  variables. Definamos además

$$\mathbf{k}! = \prod_{h=1}^n k_h!.$$

Si  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$  y  $\phi_n$  es la densidad gaussiana estándar  $n$ -dimensional, entonces, al factorizar  $\phi_n$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \tilde{H}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{h=1}^n H_{k_h}(x_h) \prod_{h=1}^n H_{j_h}(x_h) \phi_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \prod_{h=1}^n \int_{\mathbb{R}} H_{k_h}(x) H_{j_h}(x) \phi(x) dx \\ &= \mathbf{k}! \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Emulando algunos argumentos usados en la demostración de la Proposición 1.2.2, consideremos  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , tal que para todos  $k_1, \dots, k_n \geq 0$ , verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \phi_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Si  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^m \prod_{h=1}^n \frac{(is_h)^{k_h}}{k_h!} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \phi_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^m \prod_{h=1}^n \frac{(is_h x_h)^{k_h}}{k_h!} dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Aplicando como antes el teorema de convergencia dominada, al pasar al límite en  $m$ , se puede concluir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{i\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Por ser nula la función característica de  $f$ , resulta que casi seguramente  $f = 0$ . Se obtiene entonces el siguiente resultado como extensión de la Proposición 1.2.2.

**Proposición 1.2.5.** Para cada  $n \geq 1$ , la familia  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}!}} \tilde{H}_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n \right\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}^n, \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x})$ . Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x})$  se tiene la expansión

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n \\ |\mathbf{k}|=q}} c_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{k}!}},$$

donde

$$c_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\tilde{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{k}!}} \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

## 1.2.2. Movimiento browniano

Mantengamos en lo que sigue las consideraciones notacionales expresadas en los comentarios posteriores a la Definición 1.1.9.

**Definición 1.2.6.** Un proceso estocástico  $\mathcal{B} = (B(t))_{t \geq 0}$  definido en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  es un *proceso de Wiener* o *movimiento browniano* si satisface:

1.  $P(B(0, \cdot) = 0) = 1$ .
2. Para todos  $0 \leq s < t$ , la variable  $B(t) - B(s)$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$ .
3.  $\mathcal{B}$  tiene incrementos independientes, i.e., para cada  $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ , las variables  $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$  son independientes.
4. Casi todas las trayectorias de  $\mathcal{B}$  son continuas, i.e.,  $P(B(\cdot, \omega) \in C([0, \infty))) = 1$ .

La cuarta de las condiciones anteriores puede deducirse de las anteriores y solamente se incluyó por simplicidad en la exposición. Es vasta la literatura en la que se demuestra la existencia de un proceso que verifica los puntos anteriores. En particular, puede encontrarse una completa descripción del proceso de construcción del movimiento browniano, en el clásico [15]. Las demostraciones de los siguientes resultados también pueden encontrarse allí.

**Proposición 1.2.7.** Para cada  $s > 0$ , se verifica que  $B(s)$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $s$ . Para cada  $s, t \geq 0$ , se verifica que  $\mathbb{E}(B(s)B(t)) = s \wedge t$ .

**Proposición 1.2.8.** Para cada  $s_0 \geq 0$ , el proceso  $\tilde{B}(s) = B(s + s_0) - B(s_0)$  es también un movimiento browniano.

**Proposición 1.2.9.** Para cada  $\lambda > 0$ , el proceso  $\tilde{B}(s) = B(\lambda s)/\sqrt{\lambda}$  es también un movimiento browniano.

El siguiente resultado y su corolario dan cuenta de la violencia de la fluctuación de las trayectorias de un movimiento browniano: casi seguramente, las trayectorias de un movimiento browniano tienen variación cuadrática no nula.

**Proposición 1.2.10.** Sean  $\Delta_n = \{t_0, \dots, t_n\}$  una partición de un intervalo finito  $[a, b]$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  y  $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ , la norma de dicha partición. Entonces,

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 = b - a, \quad (1.17)$$

en  $L^2(\Omega)$ .

Sabido es que la convergencia en  $L^2(\Omega)$  implica convergencia en probabilidad y que ésta última implica la existencia de una subsucesión que converge casi seguramente. Luego, se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.11.** Existe una subsucesión  $(\tilde{\Delta}_n)_{n \geq 1}$  de la sucesión de particiones dada en el teorema anterior, para la cual la convergencia dada por el límite (1.17) es casi segura, si  $\|\tilde{\Delta}_n\| \xrightarrow{n} 0$ .

Introduzcamos brevemente a continuación algunas generalizaciones de conceptos ya abordados.

**Definición 1.2.12.** Sean  $(B^+(s))_{s \geq 0}$  y  $(B^-(s))_{s \geq 0}$  movimientos brownianos independientes. Al proceso  $(B(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , tal que para cada  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$B(s) = B^+(s)\mathbf{1}_{[0, +\infty)}(s) + B^-(-s)\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(s),$$

lo llamamos *movimiento browniano bilateral*.

Es inmediato verificar que este nuevo proceso verifica las condiciones de la Definición 1.2.6.

**Definición 1.2.13.** Un *movimiento browniano a valores complejos* es un proceso  $\mathcal{B} = (B(s))_{s \in \mathbb{R}}$  tal que

$$B(s) = B_1(s) + iB_2(s),$$

siendo  $B_k(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_k(s)$ ,  $k = 1, 2$ , donde  $(\tilde{B}_1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  y  $(\tilde{B}_2(s))_{s \in \mathbb{R}}$  son movimientos brownianos bilaterales e independientes.

Naturalmente,  $\mathcal{B}$  es un proceso centrado y además,

$$\mathbb{E}(|B(s)|^2) = \mathbb{E}(|B_1(s)|^2) + \mathbb{E}(|B_2(s)|^2) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s.$$

### 1.2.3. Integral múltiple de Wiener-Itô

Vamos a presentar ahora las principales ideas que intervienen en el proceso de construcción de las integrales múltiples de Wiener-Itô (MWI). Como veremos sobre el final de esta sección, estos objetos viven en el corazón de la teoría del caos de Wiener, lo que a su vez representa una herramienta ineludible en el estudio de ciertos funcionales de procesos gaussianos que se presentarán en los capítulos centrales de este trabajo. Comenzamos con un abordaje abstracto como el presentado en [17] y en [18]. En el Apéndice presentaremos además los detalles explícitos de la construcción de la integral para un caso concreto.

**Definición 1.2.14.** Diremos que  $f : T^q \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una función simétrica si

$$f(t_1, \dots, t_q) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}),$$

para toda  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ , donde  $\mathfrak{S}_q$  es conjunto de todas las permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, q\}$ . Simbolizaremos con  $L_s^2(T^q)$  al conjunto de las funciones simétricas de cuadrado integrable en  $T^q$ .

**Definición 1.2.15.** Sea  $T$  un conjunto no vacío cualquiera y  $f : T^q \rightarrow \mathbb{R}^d$ . La *simetrización* de  $f$  es  $\widehat{f} : T^q \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que

$$\widehat{f}(t_1, \dots, t_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}).$$

Sean  $\mathcal{X}$  y  $\widetilde{\mathcal{X}}$  como fueron introducidos en las Definiciones 1.1.11 y 1.1.15. Fijemos  $q \geq 1$  y definamos  $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) < \infty\}$ . Simbolicemos con  $\mathcal{O}_q$  a la familia de funciones de la forma

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_q \leq k} a_{i_1, \dots, i_q} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_q}}(t_1, \dots, t_q),$$

donde los conjuntos  $A_{i_1}, \dots, A_{i_q} \in \mathcal{B}_0$  son disjuntos dos a dos y los coeficientes verifican  $a_{i_1, \dots, i_q} = 0$  si existen  $j, k \in \{1, \dots, q\}$  tal que  $j \neq k$  y  $i_j = i_k$ . Las funciones de la familia  $\mathcal{O}_q$  se anulan en rectángulos que cortan cualquier subconjunto diagonal  $\{t_j = t_k : j \neq k\}$ . Si  $f \in \mathcal{O}_q$ , se define

$$I_q(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_q \leq k} a_{i_1, \dots, i_q} \widetilde{X}(A_{i_1}) \cdots \widetilde{X}(A_{i_q}).$$

Puede probarse que esta definición no depende de la representación de  $f$  y que se verifican las siguientes propiedades:

1. El mapa  $I_q : \mathcal{O}_q \rightarrow L^2(\Omega)$  es lineal.

2.

$$I_q(f) = I_q(\widehat{f}) \tag{1.18}$$

3.

$$\mathbb{E}(I_q(f)I_p(g)) = \delta_{q,p} q! \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(T^q)}. \tag{1.19}$$

La familia  $\mathcal{O}_q$  es densa en  $L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$  y como consecuencia del tercero de los puntos anteriores, es sencillo probar

$$\mathbb{E}(I_q(f)^2) = q! \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2(T^q)}^2 \leq q! \|f\|_{L^2(T^q)}^2.$$

Luego,  $I_q$  es un operador lineal acotado en un subconjunto denso, por lo que puede ser extendido a un operador lineal continuo de  $L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$  en  $L^2(\Omega)$ , al que también simbolizaremos  $I_q$  y que verifica las propiedades (1.18) y (1.19).

**Definición 1.2.16.** Si  $f \in L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$ , a  $I_q(f)$  lo denominamos *integral múltiple de Wiener* de  $f$  respecto al proceso  $\mathcal{X}$  y la notación habitual es

$$I_q(f) = \int_{T^q} f(t_1, \dots, t_q) dX(t_1) \cdots dX(t_q).$$

Reservaremos la denominación *integral múltiple de Wiener-Itô* para el caso concreto en el que  $\tilde{X}$  es una medida browniana en  $T^q$  (Ejemplo 1.1.17).

En el Apéndice se presenta con cierto nivel de detalle el proceso de construcción de la integral múltiple de Wiener-Itô en rectángulos de  $\mathbb{R}^d$ . Veamos ahora una generalización de la caracterización hecha en la Observación 1.1.16, lo que nos permitirá extender el concepto de integral múltiple de Wiener-Itô al caso de integrando a valores complejos.

**Definición 1.2.17.** Sea  $\mathcal{X}$  un proceso gaussiano a valores complejos con parámetro en  $L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$ , donde  $\mu^q$  es una medida  $\sigma$ -finita no atómica. Para cada  $A \in \mathcal{B}^q$  tal que  $\mu^q(A) < \infty$ , sea  $\tilde{X}(A) = X(\mathbf{1}_A)$ . Se dice que  $\tilde{X}$  es una *medida gaussiana compleja* si se verifican para todos  $A, B$  in  $\mathcal{B}^q$ , con  $\mu^q(A), \mu^q(B) < \infty$ ,

1.  $\mathbb{E}(\tilde{X}(A)) = 0$ .
2.  $\mathbb{E}(\tilde{X}(A)\overline{\tilde{X}(A)}) = \mu^q(A)$ .
3.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \tilde{X}(A \cup B) = \tilde{X}(A) + \tilde{X}(B)$ , c.s.
4.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{X}(A)\overline{\tilde{X}(B)}) = 0$ .

A partir de medidas gaussianas complejas se puede extender la construcción de la integral múltiple de Wiener a integrandos  $f : T^q \rightarrow \mathbb{C}$  cuadrado integrable respecto a la medida  $\mu^q$ . Profundizaremos en esta idea en la Sección 1.5.

**Definición 1.2.18.** Si  $f_1, \dots, f_q$  son funciones definidas en  $T$  y a valores en  $\mathbb{R}$ , su *producto tensorial* es la función  $f_1 \otimes \cdots \otimes f_q : T^q \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_q(t_1, \dots, t_q) = f_1(t_1) \cdots f_q(t_q).$$

La notación  $f_1^{\otimes q_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{\otimes q_n} = \bigotimes_{j=1}^n f_j^{\otimes q_j}$  indica que  $f_j$  está repetida  $q_j$  veces.

**Definición 1.2.19.** Sean  $f \in L^2(T^p)$  y  $g \in L^2(T^q)$  dos funciones simétricas. Si  $1 \leq k \leq p \wedge q$ , la *contracción* de  $k$  índices de  $f$  y  $g$  es la función  $f \otimes_k g \in L^2(T^{p+q-2k})$ , tal que

$$f \otimes_k g(t_1, \dots, t_{p+q-2k}) = \int_{T^k} f(t_1, \dots, t_{p-k}, z_1, \dots, z_k) g(t_{p-k+1}, \dots, t_{p+q-2k}, z_1, \dots, z_k) d\mu(z_1) \cdots d\mu(z_k).$$

Convenimos además que  $f \otimes_0 g = f \otimes g$ , es decir, el producto tensorial de  $f$  y  $g$ .

Observemos que las contracciones no son necesariamente funciones simétricas. Escribiremos  $f \hat{\otimes}_k g$  para hacer referencia a la simetrización de  $f \otimes_k g$ . Considerando  $p = q = k$ , resulta

$$f \otimes_p g = \langle f, g \rangle_{L^2([0,1]^p)}.$$

También, por aplicación de la propiedad triangular,

$$\|f \hat{\otimes}_k g\|_{L^2([0,1]^{p+q-2k})} \leq \|f \otimes_k g\|_{L^2([0,1]^{p+q-2k})}.$$

El siguiente resultado es usualmente denominado *fórmula de la multiplicación*.



**Proposición 1.2.20.** Si  $f \in L_s^2(T^p)$  y  $g \in L_s^2(T^q)$ , entonces

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{k=0}^{p \wedge q} k! \binom{p}{k} \binom{q}{k} I_{p+q-2k}(f \widehat{\otimes}_k g).$$

#### 1.2.4. Caos de Wiener

Presentaremos a continuación una introducción a la teoría del caos de Wiener y su construcción a partir de espacios de polinomios en variables gaussianas representadas como integrales de Wiener. Esta forma de abordaje no es la única posible. Puede consultarse por ejemplo [8], donde se hace una construcción con carácter más general tomando como base polinomios en espacios de Hilbert gaussianos arbitrarios.

Como en las subsecciones anteriores, consideraremos que  $(T, \mathcal{B}, \mu)$  es un espacio de medida en el que  $\mu$  es una medida  $\sigma$ -finita no atómica<sup>3</sup>. Abreviaremos la notación escribiendo  $L^2(T^q)$  en lugar de  $L^2(T^q, \mathcal{B}^q, \mu^q)$ , para todo  $q \geq 1$ . En lo que sigue  $I_q(\cdot)$  indicará la integral múltiple de Wiener-Itô respecto al movimiento  $\mathcal{B}$  como en la Definición 1.2.6.

**Definición 1.2.21.** A todo producto de la forma  $I_1(f_1)I_1(f_2) \cdots I_1(f_n)$ , donde  $f_1, \dots, f_n \in L^2(T)$ , lo llamamos *caos polinomial* de orden  $n$ .

Como consecuencia de la desigualdad de Hölder, todo caos polinomial pertenece a  $L^2(\Omega)$ . Para cada  $n \geq 1$ , simbolicemos con  $\mathcal{L}_n$  al subespacio de  $L^2(\Omega)$  generado por los caos polinomiales de orden a lo sumo  $n$ , es decir,

$$\mathcal{L}_n = \text{span} \{ I_1(f_1) \cdot I_1(f_2) \cdots I_1(f_k) : f_1, \dots, f_k \in L^2(T); k \leq n \}.$$

Sea además para cada  $n$ ,  $\mathcal{P}_n = \overline{\mathcal{L}_n}$ , donde la clausura es en  $L^2(\Omega)$  y adoptemos la convención  $\mathcal{P}_0 = \mathbb{R}$ .

Naturalmente, se verifica que  $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_{i+1}$ , para todo  $i \geq 0$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea ahora  $K_n$  el complemento ortogonal de  $\mathcal{P}_{n-1}$  en  $\mathcal{P}_n$ , es decir

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} \oplus K_n,$$

donde  $\oplus$  indica suma directa ortogonal. Convengamos además  $K_0 = \mathbb{R}$ .

El siguiente es el principal resultado de esta subsección.

**Teorema 1.2.22.** El espacio  $L^2(\Omega)$  es suma directa ortogonal de los subespacios  $K_q$ ,  $q \geq 0$ . Es decir,

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{q \geq 0} K_q. \quad (1.20)$$

La colección  $\{K_q : q \geq 0\}$  es una familia de subespacios ortogonales de  $L^2(\Omega)$ .

**Definición 1.2.23.** A cada  $K_q$  lo llamamos *caos homogéneo* o simplemente *caos* de orden  $q$ . A la descomposición dada por (1.20) se la denomina *descomposición en caos de Wiener*.

La demostración del Teorema 1.2.22 es consecuencia inmediata de un par de lemas que veremos a continuación. El primero de ellos es estándar y omitiremos aquí su demostración, la que puede encontrarse en [15] y en [21].

---

<sup>3</sup>Esto es: para cada  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $\mu(B) > 0$ , existe  $C \in \mathcal{B}$  tal que  $C \subset B$  y  $0 < \mu(C) < \mu(B)$ .

**Lema 1.2.24.** Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X \in L^1(\Omega)$ . Sea además  $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$  una filtración tal que  $\sigma\left(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n\right) = \mathcal{A}$ . Entonces,

$$\lim_n \mathbb{E}(X | \mathcal{A}_n) = X,$$

en  $L^1(\Omega)$ .

**Lema 1.2.25.** La unión  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$  es densa en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Alcanza con probar que el complemento ortogonal de  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$  en  $L^2(\Omega)$  es el subespacio nulo. Sea entonces  $\xi \in \left(\bigcup_{q \geq 0} \mathcal{P}_q\right)^\perp$ . Vamos a probar que  $\xi = 0$ , casi seguramente.

Comencemos considerando una base ortonormal  $\{e_n : n \geq 1\}$  de  $L^2(T)$ . Para cada  $n$ , sea  $\mathcal{A}_n = \sigma\{I_1(e_1), \dots, I_1(e_n)\}$ . Es sencillo verificar que  $(\mathcal{A}_n)_n$  es una filtración y puede probarse además que  $\sigma\left\{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n\right\} = \mathcal{A}$ .

Fijado  $n \geq 0$ , dados  $k_1, \dots, k_n \geq 0$ , se tiene de acuerdo al cuarto ítem en la Proposición 5.1.3,

$$\mathbb{E}(I_1(e_1)^{k_1} \cdot I_1(e_2)^{k_2} \cdots I_1(e_n)^{k_n} \cdot \xi | \mathcal{A}_n) = I_1(e_1)^{k_1} \cdot I_1(e_2)^{k_2} \cdots I_1(e_n)^{k_n} \cdot \mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_n),$$

dado que  $I_1(e_1)^{k_1} \cdot I_1(e_2)^{k_2} \cdots I_1(e_n)^{k_n}$  es  $\mathcal{A}_n$ -medible. Tomando esperanza en ambos miembros de la igualdad anterior, dado que  $\xi$  es ortogonal a  $\mathcal{P}_n$  y por el primer ítem de la referida proposición, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}(I_1(e_1)^{k_1} \cdot I_1(e_2)^{k_2} \cdots I_1(e_n)^{k_n} \cdot \xi) \\ &= \mathbb{E}(I_1(e_1)^{k_1} \cdot I_1(e_2)^{k_2} \cdots I_1(e_n)^{k_n} \mathbb{E}[\xi | \mathcal{A}_n]) . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Es posible determinar una función medible  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_n) = F_n(I_1(e_1), \dots, I_1(e_n))$  (ver el Apéndice, comentarios finales en la Observación 5.1.4). De las propiedades de la integral de Wiener se obtiene que  $I_1(e_i) \sim N(0, 1)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  y que  $\mathbb{E}(I_1(e_i)I_1(e_j)) = \delta_{i,j}$ . Por lo anterior, el vector  $(I_1(e_1), \dots, I_1(e_n))$  tiene distribución gaussiana conjunta. Luego, de (1.21) se deduce que para todos  $k_1, \dots, k_n \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) d\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1.22)$$

donde  $\phi_n$  es la medida gaussiana estándar en  $\mathbb{R}^n$ . Veamos ahora que  $F_n = 0$  en casi todo punto, para lo cual utilizaremos la ortogonalidad de los polinomios de Hermite probada antes. De (1.22) y (1.7) se deduce que para todos  $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_{k_1}(x_1) H_{k_2}(x_2) \cdots H_{k_n}(x_n) F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) d\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (1.23)$$

Pero de acuerdo a la Proposición 1.2.5, la familia  $\{H_{k_1}(x_1) H_{k_2}(x_2) \cdots H_{k_n}(x_n) : k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0\}$  es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n, \phi_n(\mathbf{x})d\mathbf{x})$ , por lo que (1.23) implica que  $F_n = 0$  en casi todo punto. Por su definición, es  $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_n) = 0$ , casi seguramente. Del Lema 1.2.24 se deduce que  $\xi = 0$ , casi seguramente, con lo que se concluye la prueba. □

*Demostración.* (del Teorema 1.2.22). Por construcción de los caos homogéneos, se verifica  $\mathcal{P}_n = \bigoplus_{q=0}^n K_q$ , para cada  $n \geq 0$ . Luego,

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} K_q.$$

De acuerdo al Lema 1.2.25, el primer miembro de la igualdad anterior es precisamente  $L^2(\Omega)$ . Con esta observación se concluye la prueba. □

### 1.3. Teorema de Wiener-Itô

En la presente sección nos ocuparemos del teorema de Wiener-Itô que tiene vital importancia en el desarrollo de las ideas que aparecen en los capítulos centrales del presente trabajo. Comenzamos con su enunciado y luego su demostración será consecuencia de una serie de resultados que presentaremos a continuación. Usamos la notación  $L^2(\Omega)$  para hacer referencia a  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , siendo  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por el movimiento browniano fijado  $\mathcal{B}$ .

**Teorema 1.3.1 (Wiener-Itô).** *El espacio  $L^2(\Omega)$  admite la descomposición ortogonal*

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{q \geq 0} K_q,$$

donde cada  $K_q$  es un espacio de integrales múltiples de Wiener-Itô de orden  $q$ . Cada  $X \in L^2(\Omega)$  puede ser expresada de forma única mediante el desarrollo

$$X = \sum_{q \geq 0} I_q(f_q),$$

siendo  $f_q \in L_s^2(T^q)$ . Además,

$$\|X\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{q \geq 0} q! \|f_q\|_{L^2(T^q)}^2.$$

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $q \geq 0$ . Si  $\pi_q$  es la proyección ortogonal de  $L^2(\Omega)$  sobre  $K_q$ , entonces*

$$\pi_q(I_1(f)^q) = H_q(I_1(f)), \quad (1.24)$$

para toda  $f \in L^2(T)$ .

*Demostración.* Sea  $f \in L^2(T)$ . Comencemos con un par de observaciones de carácter general. En primer lugar, de la identidad (1.15) se deduce que para todo  $q \geq 0$ ,

$$I_1(f)^q = H_q(I_1(f)) + \sum_{k=1}^{\lfloor q/2 \rfloor} \binom{q}{2k} (2k-1)!! H_{q-2k}(I_1(f)). \quad (1.25)$$

Por otra parte, si  $p, q \geq 0$ , resulta

$$\mathbb{E}(H_q(I_1(f))H_p(I_1(f))) = \int_{\mathbb{R}} H_q(x)H_p(x)\phi(x) dx = \delta_{q,p}q!, \quad (1.26)$$

de acuerdo a la Proposición 1.2.2. Observemos que en el desarrollo en el segundo miembro de (1.25), por el Teorema 1.2.22, todos los términos excepto el primero son ortogonales a  $K_q$ . Luego, se verifica

$$\begin{aligned} \pi_q(I_1(f)^q) &= \pi_q\left(H_q(I_1(f)) + \sum_{k=1}^{\lfloor q/2 \rfloor} \binom{q}{2k} (2k-1)!! H_{q-2k}(I_1(f))\right) \\ &= \pi_q(H_q(I_1(f))). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Si se demuestra que  $H_q(I_1(f)) \perp \mathcal{P}_{q-1}$ , entonces resultará  $\pi_q(H_q(I_1(f))) = H_q(I_1(f))$  y de acuerdo a (1.27), habremos obtenido (1.24). Veamos a continuación que ese es el caso.

Sean  $g_1, \dots, g_m \in L^2(T)$ , con  $0 \leq m < q$ . El objetivo es probar que se verifica

$$\mathbb{E}(H_q(I_1(f)) \cdot I_1(g_1) \cdots I_1(g_m)) = 0. \quad (1.28)$$

Para cada  $1 \leq i \leq m$ , pueden elegirse  $c_i \in \mathbb{R}$  y  $h_i \perp f$ , de forma tal que sea  $g_i = c_i f + h_i$ . Así se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_q(I_1(f)) \cdot I_1(g_1) \cdots I_1(g_m)) &= \mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) \prod_{i=1}^m I_1(c_i f + h_i)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) \prod_{i=1}^m (c_i I_1(f) + I_1(h_i))\right).\end{aligned}$$

Al desarrollar el producto en el integrando anterior se obtienen  $2^m$  sumandos, todos de la forma

$$C \mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) \cdot I_1(f)^\alpha \prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}\right), \quad (1.29)$$

donde  $C$  es constante,  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$  y  $\alpha + \beta_1 + \dots + \beta_m = m$ . Veamos que cada uno de los términos de la forma (1.29) es nulo: por (1.25), se tiene que  $I_1(f)^\alpha = H_\alpha(I_1(f)) + T_{\alpha-1}(I_1(f))$ , donde  $T_{\alpha-1}(I_1(f)) \perp K_\alpha$ . La esperanza en (1.29) puede escribirse

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) (H_\alpha(I_1(f)) + T_{\alpha-1}(I_1(f))) \prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}\right) \\ = \mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) H_\alpha(I_1(f)) \prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}\right) + \mathbb{E}\left(H_q(I_1(f)) T_{\alpha-1}(I_1(f)) \prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}\right)\end{aligned} \quad (1.30)$$

Por la independencia de  $I_1(f)$  y  $I_1(h_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , se puede factorizar la esperanza en el primero de los sumandos anteriores y obtener

$$\mathbb{E}(H_q(I_1(f)) H_\alpha(I_1(f))) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}\right) = 0,$$

dato que el primer factor es nulo, de acuerdo a (1.26), por ser  $\alpha < q$ . El segundo sumando en (1.30) también es nulo: basta ver que  $H_q(I_1(f)) \in K_q$ , mientras  $T_{\alpha-1}(I_1(f)) \prod_{i=1}^m I_1(h_i)^{\beta_i}$  es un polinomio en  $I_1(f), I_1(h_1), \dots, I_1(h_m)$ , de grado  $m - 1 < q$ , por lo que pertenece a  $\mathcal{P}_{q-1}$ , de donde se deduce su ortogonalidad con  $H_q(I_1(f))$ . Con esto se concluye la demostración.  $\square$

Con similares argumentos y notación más pesada puede probarse el siguiente resultado, del cual la Proposición 1.3.2 resulta un caso particular.

**Proposición 1.3.3.** *Si  $f_1, \dots, f_k$  son elementos no nulos de  $L^2(T)$  y si  $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Z}_0^+$ , entonces*

$$\pi_q\left(\prod_{i=1}^k I_1(f_i)^{q_i}\right) = \prod_{i=1}^k H_{q_i}(I_1(f_i)),$$

donde  $q = q_1 + \dots + q_k$ .

En lo que sigue, fijemos  $(e_k)_{k \geq 1}$ , base ortonormal de  $L^2(T)$ . Si  $\mathbf{q} = (q_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión de puntos en  $\mathbb{Z}_0^+$  con suma finita, definimos

$$H_{\mathbf{q}} = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{q_k!}} H_{q_k}(I_1(e_k)). \quad (1.31)$$

Observemos que el producto en el segundo miembro de la igualdad anterior se reduce a una cantidad finita de factores. Definamos además, para cada  $q \geq 0$ ,

$$\mathcal{H}(q) := \{H_{\mathbf{q}} : \|\mathbf{q}\|_1 = q\},$$

donde  $\|\cdot\|_1$  indica la norma de  $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ , que en este caso representa simplemente la suma de los términos de la sucesión. De esta forma, por ejemplo,  $\mathcal{H}(0) = \{1\}$ ;  $\mathcal{H}(1) = \{I_1(e_k) : k \geq 1\}$ ;  $\mathcal{H}(2) = \{I_1(e_k)I_1(e_{k'}) : 1 \leq k < k'\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(I_1(e_k)^2 - 1) : k \geq 1\right\}$ . En el siguiente resultado se utiliza la notación que acabamos de incorporar.

**Proposición 1.3.4.** *Para cada  $q \in \mathbb{Z}_0^+$ , la familia  $\mathcal{H}(q)$  es una base ortonormal de  $K_q$ .*

*Demostración.* Consideremos fijo  $q \in \mathbb{Z}_0^+$ . En primer lugar observemos que  $\mathcal{H}(q) \subset K_q$ , de acuerdo a la Proposición 1.3.3. Además, la familia  $\mathcal{H}(q)$  es un sistema ortonormal en  $L^2(\Omega)$ . En efecto, fijado  $k \geq 1$ , de (1.10) se deduce  $\|H_{q_k}(I_1(e_k))\|_{L^2(\Omega)}^2 = q!$  y de la independencia de  $\{I_1(e_k) : k \geq 1\}$  se obtiene que si  $H_{\mathbf{q}}$  es como en (1.31), entonces  $\|H_{\mathbf{q}}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Además, si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son dos sucesiones de puntos de  $\mathbb{Z}_0^+$  de suma finita, con  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ , entonces, existe  $k_0 \geq 1$  tal que  $p_{k_0} \neq q_{k_0}$ . Luego, por la anteriormente citada independencia de las integrales de Wiener de la base ortonormal de  $L^2(T)$ , se puede efectuar la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_{\mathbf{q}}H_{\mathbf{p}}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{q_{k_0}p_{k_0}}}H_{q_{k_0}}(I_1(e_{k_0}))H_{p_{k_0}}(I_1(e_{k_0}))\prod_{k \neq k_0}\frac{1}{\sqrt{q_kp_k}}H_{q_k}(I_1(e_k))H_{p_k}(I_1(e_k))\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{q_{k_0}p_{k_0}}}H_{q_{k_0}}(I_1(e_{k_0}))H_{p_{k_0}}(I_1(e_{k_0}))\right)\mathbb{E}\left(\prod_{k \neq k_0}\frac{1}{\sqrt{q_kp_k}}H_{q_k}(I_1(e_k))H_{p_k}(I_1(e_k))\right). \end{aligned}$$

El primero de los factores en el último miembro en las igualdades anteriores es nulo como consecuencia de (1.26), de donde se obtiene la ortogonalidad.

Lo que resta para concluir la prueba es que a continuación verifiquemos que  $\text{span}(\mathcal{H}(q))$  es denso en  $K_q$ . Sea  $\eta \in K_q \cap \mathcal{H}(q)^\perp$ . Esto es,  $\pi_q(\eta) = \eta$  y  $\mathbb{E}(\eta H_{\mathbf{q}}) = \langle \eta, H_{\mathbf{q}} \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ , para toda sucesión  $\mathbf{q}$  en  $\mathbb{Z}_0^+$ , de suma  $q$ . Además, observemos que si  $\mathbf{p}$  es cualquier sucesión en  $\mathbb{Z}_0^+$  con suma finita, entonces  $\pi_q(H_{\mathbf{p}}) = H_{\mathbf{p}} \cdot \delta_{\|\mathbf{p}\|_1, q}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \langle \eta, H_{\mathbf{p}} \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \pi_q(\eta), H_{\mathbf{p}} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \eta, \pi_q(H_{\mathbf{p}}) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado que la proyección ortogonal es un operador autoadjunto. Hemos obtenido que  $\eta$  es ortogonal a cualquier polinomio de la forma (1.31). Con argumentos similares a los usados en la demostración del Lema 1.2.25, se obtiene que  $\eta = 0$ , casi seguramente. Queda así probada la densidad de  $\text{span}(\mathcal{H}(q))$  en  $K_q$ . □

**Corolario 1.3.5.** *La colección*

$$\{H_{\mathbf{q}} : \|\mathbf{q}\|_1 = q\}_{q \geq 0}$$

*es una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ . Cada  $X \in L^2(\Omega)$  tiene expansión única*

$$X = \sum_{q \geq 0} \sum_{\|\mathbf{q}\|_1 = q} c_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{q}},$$

*siendo  $c_{\mathbf{q}} = \mathbb{E}(XH_{\mathbf{q}})$ .*

Presentemos a continuación algo de la notación que utilizaremos. Para el producto tensorial utilizaremos la notación introducida en la Definición 1.2.18. Al escribir  $f_1^{\otimes q_1} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} f_n^{\otimes q_n} = \widehat{\otimes}_{j=1}^n f_j^{\otimes q_j}$  haremos referencia a la simetrización de  $\bigotimes_{j=1}^n f_j^{\otimes q_j}$ . Si  $\mathbf{q} = (q_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión de elementos de  $\mathbb{Z}_0^+$ , con  $\|\mathbf{q}\|_1 = q$ , entonces  $\mathbf{q}$  tiene a lo sumo  $q$  términos no nulos  $\{q_{k_1}, \dots, q_{k_r}\}$ , con  $0 \leq r \leq q$ . Utilizaremos en este caso la notación  $\bigotimes_{k=1}^\infty f_k^{\otimes q_k}$  para hacer referencia a  $f_{k_1}^{\otimes q_{k_1}} \otimes \dots \otimes f_{k_r}^{\otimes q_{k_r}}$ . De forma similar a lo anterior, se utilizará también la notación  $\widehat{\otimes}_{k=1}^\infty f_k^{\otimes q_k}$ .

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [15].

**Proposición 1.3.6.** Si  $f_1, \dots, f_k$  son funciones ortogonales no nulas en  $L^2(T)$  y  $n_1, \dots, n_k$  son enteros positivos tales que  $n_1 + \dots + n_k = q$ , entonces,

$$I_q(f_1^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes f_k^{\otimes n_k}) = \prod_{j=1}^k H_{n_j}(I_1(f_j)).$$

En particular, para cualquier  $f \in L^2(T)$  no nula,

$$I_q(f^{\otimes q}) = H_q(I_1(f)).$$

**Proposición 1.3.7.** Sea  $q \geq 1$ . Si  $f \in L^2(T^q)$ , entonces  $I_q(f) \in K_q$ . Recíprocamente, si  $X \in K_q$ , entonces existe y es única  $f \in L^2_s(T^q)$  tal que  $X = I_q(f)$ .

*Demostración.* Como  $I_q(f) = I_q(\widehat{f})$ , para probar la primera parte del enunciado alcanza con que consideremos  $f \in L^2_s(T^q)$ . Sea  $\{e_k\}_{k \geq 1}$  una base ortonormal de  $L^2(T)$ . La familia

$$\left\{ \frac{\sqrt{q!}}{\sqrt{\prod_{k \geq 1} q_k!}} \widehat{\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes q_k}} : \|q\|_1 = q \right\} \quad (1.32)$$

es una base ortonormal de  $L^2_s(T^q)$  (puede consultarse [8], donde hay un capítulo dedicado al estudio de productos tensoriales de espacios de Hilbert). Entonces  $f$  tiene el desarrollo

$$f = \sum_{\|q\|_1=q} c_q \frac{\sqrt{q!}}{\sqrt{\prod_{k \geq 1} q_k!}} \widehat{\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes q_k}},$$

siendo  $c_q$  el correspondiente coeficiente de Fourier en  $T^q$ , que verifica  $\sum_{\|q\|_1=q} c_q^2 = \|f\|_{L^2(T^q)}^2 < \infty$ . Luego, por la Proposición 1.3.6 y (1.31),

$$\begin{aligned} I_q(f) &= \sum_{\|q\|_1=q} c_q \frac{\sqrt{q!}}{\sqrt{\prod_{k \geq 1} q_k!}} \prod_{k \geq 1} H_{q_k}(I_1(e_k)) \\ &= \sqrt{q!} \sum_{\|q\|_1=q} c_q H_q. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.3.4,

$$\begin{aligned} \|I_q(f)\|_{L^2(\Omega)} &= q! \sum_{\|q\|_1=q} c_q^2 \\ &= q! \|f\|_{L^2(T^q)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

con lo que queda probado que  $I_1(f) \in K_q$ .

Para la demostración del recíproco, consideremos  $X \in K_q$ . Por la Proposición 1.3.4, se tiene la expansión

$$X = \sum_{\|q\|_1=q} d_q H_q. \quad (1.33)$$

Sea

$$f = \sum_{\|q\|_1=q} d_q \frac{1}{\sqrt{\prod_{k \geq 1} q_k!}} \widehat{\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes q_k}}. \quad (1.34)$$

Como (1.32) es base ortonormal de  $L^2_s(T^q)$ , entonces resulta

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_s^2(T^q)}^2 &= \frac{1}{q!} \sum_{\|\mathbf{q}\|_1=q} d_{\mathbf{q}}^2 \\ &= \frac{1}{q!} \|X\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty,\end{aligned}$$

por lo que  $f \in L_s^2(T^q)$ . A partir de los desarrollos (1.33) y (1.34) se deduce que  $I_q(f) = X$ . Utilizando un argumento estándar para probar la unicidad de  $f$ , se concluye la prueba.  $\square$

La demostración del Teorema 1.3.1 es consecuencia directa del Teorema 1.2.22 y del hecho de que, según la Proposición 1.3.7, resulta  $K_q = \{I_q(f) : f \in L_s^2(T^q)\}$ .

## 1.4. Fórmulas de Mehler

Los resultados enunciados en la presente sección, etiquetados como *fórmulas de Mehler*, aparecerán reiteradamente en muchos de los cálculos que aparecerán en las secciones posteriores.

La prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [4].

### Proposición 1.4.1.

1. Sea  $(X, Y)$  un vector gaussiano centrado tal que  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$  y sea  $\rho = \mathbb{E}(XY)$ . Entonces

$$\mathbb{E}(H_q(X)H_j(Y)) = \delta_{q,j} q! \rho^q, \quad (1.35)$$

donde  $\delta$  es la delta de Kronecker.

2. Sea  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  un vector gaussiano centrado con matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ 0 & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 & 0 \\ \rho_{1,4} & \rho_{2,4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si  $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ ,

$$\mathbb{E}(H_{r_1}(X_1)H_{r_2}(X_2)H_{r_3}(X_3)H_{r_4}(X_4)) = \sum_{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in Z} \frac{r_1! r_2! r_3! r_4!}{d_1! d_2! d_3! d_4!} \rho_{1,3}^{d_1} \rho_{1,4}^{d_2} \rho_{2,3}^{d_3} \rho_{2,4}^{d_4} \quad (1.36)$$

donde

$$Z = \left\{ (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{Z}^{+4} : d_1 + d_2 = r_1, d_3 + d_4 = r_2, d_1 + d_3 = r_3, d_2 + d_4 = r_4 \right\}.$$

Si  $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$ , la esperanza en (1.36) es nula.

**Observación 1.4.2.** Cálculos elementales nos conducen a que en caso de que sea  $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ , una caracterización de  $Z$  resulta

$$Z = \left\{ (r_1 - r_2 + \kappa, r_2 - \kappa, r_2 - \kappa, \kappa) \in \mathbb{Z}^{+4} : \max\{0, r_1 - r_2\} \leq \kappa \leq r_2 \right\},$$

de donde se deduce que el cardinal de  $Z$  es a lo sumo  $r_2 + 1$ .

Una generalización de la Proposición 1.4.1, cuya demostración puede hacerse de forma similar es la siguiente.

**Proposición 1.4.3.** Sea  $(X, Y) = (X_1, \dots, X_D, Y_1, \dots, Y_D)$  un vector gaussiano centrado  $2D$ -dimensional con matriz de covarianza dada por  $\begin{pmatrix} I_D & \Gamma \\ \Gamma & I_D \end{pmatrix}$ . Entonces, para todo  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D) \in \mathbb{N}^D$  y todo  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_D) \in \mathbb{N}^D$ ,

i. Si  $|\mathbf{n}| \neq |\mathbf{m}|$ ,  $\mathbb{E}(\tilde{H}_{\mathbf{n}}(X)\tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y)) = 0$ .

ii. Si  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|$ ,

$$\mathbb{E}(\tilde{H}_{\mathbf{n}}(X)\tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y)) = \sum_{\substack{d_{i,j} \geq 0 \\ \sum_i d_{i,j} = n_j; \sum_j d_{i,j} = m_i}} \mathbf{n!m!} \prod_{1 \leq i,j \leq D} \frac{(\Gamma_{i,j})^{d_{i,j}}}{d_{i,j}!}.$$

## 1.5. Representaciones espectrales unidimensionales

Si  $\mathcal{X} = (X(s))_{s \geq 0}$  es un proceso gaussiano estacionario, centrado y continuo en media cuadrática, entonces su función de covarianza  $r$  es continua, de acuerdo a la Proposición 1.1.21. Más aún,  $r$  es *definida positiva*<sup>4</sup>, i.e., si  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^+$  y  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n r(s_i - s_j) z_i \overline{z_j} &= \mathbb{E} \left( \sum_{i,j=1}^n X(s_i) X(s_j) z_i \overline{z_j} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \left| \sum_{i=1}^n X(s_i) z_i \right|^2 \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Por el teorema de Bochner (ver, por ejemplo, [13]), la continuidad de  $r$  y la condición (1.37) implican que existe una única medida  $\mu$  en  $\mathbb{R}$  tal que para cada  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$r(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} d\mu(\lambda). \quad (1.38)$$

Es decir,  $r$  es la transformada de Fourier de una medida que verifica  $r(0) = \mu(\mathbb{R})$  y a la que se denomina *medida espectral* de  $\mathcal{X}$ . En caso de que  $\mu$  tenga densidad, es decir, si existe una función  $f$  definida en  $\mathbb{R}$  de forma que para cada  $s \in \mathbb{R}$  se verifique

$$r(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad (1.39)$$

se dice que  $f$  es la *densidad espectral* del proceso  $\mathcal{X}$ . Por la simetría de  $r$ , se verifica que  $\mu$  es una medida simétrica (y en caso de existir, también lo es la densidad espectral). Nos referimos a lo obtenido en (1.38) y en (1.39) como *representaciones espectrales* de la función de covarianza. El  $k$ -ésimo *momento espectral* de  $\mathcal{X}$  es

$$\lambda_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu(\lambda). \quad (1.40)$$

De la simetría de  $\mu$  se deduce que los momentos espectrales de orden impar, si existen, son nulos. Puede demostrarse que el momento de orden  $2k$  es finito si y solo si  $r$  tiene derivada de orden  $2k$  en  $s = 0$ . Más aún, si el proceso tiene trayectorias de clase  $C^1$ , se verifica que  $\lambda_2 = -r''(0) = \mathbb{E}(X'(0)^2)$  y pueden obtenerse relaciones similares para derivadas superiores de orden par en el origen. Un completo desarrollo de estas ideas puede encontrarse en [1].

<sup>4</sup>Esta es en realidad una característica de la función de covarianza de cualquier proceso con segundo momento finito.



Consideremos que en la Definición 1.2.16, se tiene  $q = 1$  y  $T = \mathbb{R}$ . En ese caso la integral de Wiener-Itô  $I_1(\cdot)$  se define para funciones  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , verificándose la propiedad

$$I_1(f) \sim N\left(0, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right) \quad (1.41)$$

y si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces

$$\mathbb{E}(I_1(f)I_1(g)) = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.42)$$

El mapa  $I_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega)$  es una isometría.

Consideremos ahora que  $(B(s))_{s \in \mathbb{R}}$  es un movimiento browniano bilateral (Definición 1.2.12). Si  $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ , definamos para cada  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$Y(s) = \int_{\mathbb{R}} \xi(s-u) dB(u). \quad (1.43)$$

A este tipo de procesos se los denomina *promedio móvil* de  $B(\cdot)$ .

**Proposición 1.5.1.** El proceso  $(Y(s))_{s \in \mathbb{R}}$  es gaussiano, centrado y estacionario.

*Demostración.* Que el proceso es gaussiano y centrado es consecuencia de (1.41). Para probar la estacionariedad, consideremos,

$$\begin{aligned} r(t, s) &:= \mathbb{E}(Y(t)Y(s)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(t-u)\xi(s-u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(t-s-v)\xi(-v) dv, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (1.42) y el cambio de variables  $u-s=v$ . Si escribimos  $\tilde{\xi}(s) = \xi(-s)$ , resulta de lo anterior que  $r(t, s) = \xi * \tilde{\xi}(t-s)$ , de donde se deduce lo que se quiere probar.  $\square$

**Ejemplo 1.5.2.** Un importante ejemplo de proceso gaussiano estacionario, que será citado en capítulos posteriores, es el denominado *proceso de Ornstein-Uhlenbeck*. En (1.43) escribamos  $\xi(s) = e^{-s}\mathbb{1}_{[0, +\infty)}(s)$  para obtener

$$Y(s) = \int_{-\infty}^s e^{-(s-u)} dB(u).$$

La función de covarianza es  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $r(s) = \xi * \tilde{\xi}(s)$  y con cálculos elementales se obtiene la expresión  $r(s) = \frac{1}{2}e^{-|s|}$ . La transformada de Fourier de  $r$  es

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\lambda) &= \widehat{\xi * \tilde{\xi}}(\lambda) \\ &= \widehat{\xi}(\lambda)\widehat{\tilde{\xi}}(\lambda) \\ &= \widehat{\xi}(\lambda)\widehat{\xi}(-\lambda) \\ &= \left|\widehat{\xi}(\lambda)\right|^2. \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de  $\xi$  es

$$\widehat{\xi}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{(i\lambda-1)s} ds.$$

De observar que  $|e^{(i\lambda-1)s}| = |e^{-s}|$ , se obtiene  $\widehat{\xi}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda-1}$ , de donde resulta  $\left|\widehat{\xi}(\lambda)\right|^2 = \frac{1}{1+\lambda^2}$ . Así, por la fórmula de inversión resulta  $r(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\lambda} \frac{1}{1+\lambda^2} d\lambda$  y por propiedades de simetría de las funciones trigonométricas elementales se obtiene

$$\begin{aligned}
r(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(s\lambda) \frac{1}{1+\lambda^2} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} \frac{1}{1+\lambda^2} d\lambda.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido así una representación espectral de  $r$ , siendo  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+\lambda^2}$  la correspondiente densidad espectral del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

En el ejemplo anterior aparecen los cálculos necesarios para obtener representaciones espectrales de las funciones de covarianza asociadas a la familia de procesos definidos por (1.43). Esto es, fijada  $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ , resulta

$$\begin{aligned}
r_Y(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} \left| \widehat{\xi}(\lambda) \right|^2 d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(s\lambda) \left| \widehat{\xi}(\lambda) \right|^2 d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

siendo  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \widehat{\xi}(\lambda) \right|^2$  la densidad espectral del proceso.

Veamos a continuación cómo obtener una representación espectral para el proceso  $(Y(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Vamos en busca de una representación del tipo

$$Y(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} \psi(\lambda) dB(\lambda), \tag{1.45}$$

pero, ¿cuál es exactamente el sentido que le damos a una integral como la del segundo miembro de la igualdad anterior? Habíamos mencionado sobre el final de la Subsección 1.2.3 la noción de integral múltiple de Wiener. Profundicemos a continuación esa idea.

Consideremos  $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$  y definamos  $g = g_1 + ig_2$ . Es inmediato que  $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ . Queremos darle sentido a la integral  $\int_{\mathbb{R}} g dB$ . Para eso, operando formalmente se obtiene,

$$\begin{aligned}
g dB &= (g_1 + ig_2) (dB_1 + i dB_2) \\
&= g_1 dB_1 - g_2 dB_2 + i(g_1 dB_2 + g_2 dB_1).
\end{aligned}$$

En base a esto definimos,

$$\mathcal{I}(g) := \int_{\mathbb{R}} g(s) dB(s) = \int_{\mathbb{R}} g_1(s) dB_1(s) - \int_{\mathbb{R}} g_2(s) dB_2(s) + i \left[ \int_{\mathbb{R}} g_1(s) dB_2(s) + \int_{\mathbb{R}} g_2(s) dB_1(s) \right].$$

Es sencillo probar la identidad  $\mathbb{E} \left( \mathcal{I}(g) \overline{\mathcal{I}(h)} \right) = \langle g, h \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}$ , de donde se deduce además  $\mathbb{E} (\mathcal{I}^2(g)) = \|g\|_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}^2$ . Decimos que  $\mathcal{I}(g)$  es la integral de Wiener-Itô de  $g$ .

Retomemos entonces el objetivo de obtener una representación como la de (1.45). Definamos el proceso  $(\tilde{Y}(s))_{s \in \mathbb{R}}$  dado por

$$\tilde{Y}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} \psi(\lambda) dB(\lambda),$$

donde  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Observemos que

$$\begin{aligned}
r_{\tilde{Y}}(t, s) &= \mathbb{E} \left( \tilde{Y}(t) \tilde{Y}(s) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \psi(\lambda) \overline{e^{is\lambda} \psi(\lambda)} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda} |\psi(\lambda)|^2 d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

de donde se deduce que el proceso es estacionario. Se puede entonces definir la función de covarianza, como  $r_{\widehat{Y}}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} |\psi(\lambda)|^2 d\lambda$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . El objetivo es determinar la  $\psi$  adecuada para que se verifique que  $r_{\widehat{Y}} = r_Y$ . Esto surge naturalmente, pues resulta claro, de la comparación de (1.46) y (1.44), que debe ser  $|\psi(\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\widehat{\xi}(\lambda)|$ . Así se obtiene la representación

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} |\widehat{\xi}(\lambda)| dB(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} \sqrt{f(\lambda)} dB(\lambda). \end{aligned}$$

Más allá de los promedios móviles, puede obtenerse una representación espectral más general para procesos definidos en  $\mathbb{R}^d$  a valores complejos. De eso trata el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [1].

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $\mu$  una medida finita en  $\mathbb{R}^d$  y  $W$  un ruido blanco gaussiano complejo basado en  $\mu$ . Entonces, el campo a valores complejos  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ , con*

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} dW(\lambda), \quad (1.47)$$

*es gaussiano y tiene covarianza*

$$r(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s-t, \lambda \rangle} d\mu(\lambda),$$

*por lo que es estacionario. Además, para cada campo gaussiano  $X$ , estacionario, centrado y continuo en media cuadrática, con función de covarianza  $r$  y medida espectral  $\mu$ , corresponde un ruido blanco gaussiano complejo  $W$  en  $\mathbb{R}^d$  tal que se verifica (1.47) en media cuadrática.*

**Observación 1.5.4.** En caso de que la función  $r$  de la Proposición 1.5.3 pertenezca a  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , del teorema de inversión de Fourier resulta que  $\mathcal{X}$  tiene densidad espectral  $f_X$ , la que por el Teorema de Bochner es no negativa. Se obtiene la siguiente representación espectral del campo:

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} \sqrt{f_X(\lambda)} dW(\lambda).$$

## 1.6. Preliminares sobre campos gaussianos

En la Definición 1.1.10 se presentó el concepto de *campo gaussiano* definido en  $T \subset \mathbb{R}^d$  y tomando valores en  $\mathbb{R}$ , como aquel  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in T}$  para el cual el vector  $n$ -dimensional  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  es gaussiano, para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y todo  $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$ . Las funciones de medias y de covarianzas son, respectivamente, para todo  $s, t \in T$ ,

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}(X(t)), \\ r(s, t) &= \mathbb{E}[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))^{\top}]. \end{aligned}$$

Parece natural obtener la siguiente generalización a campos a valores en  $\mathbb{R}^D$ .

**Definición 1.6.1.** Un *campo aleatorio* con parámetro en  $T \subset \mathbb{R}^d$  y a valores en  $\mathbb{R}^D$  es una función  $\mathbf{X} : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^D$ , de forma tal que si  $\mathbf{X}(t, \omega) = (X_1(t, \omega), \dots, X_D(t, \omega))$ , entonces cada  $X_i(t, \omega)$  es un proceso estocástico en el sentido de la Definición 1.1.9. Se dice que un campo aleatorio con parámetro en  $T \subset \mathbb{R}^d$  y tomando valores en  $\mathbb{R}^D$  es *gaussiano*, si para cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D) \in \mathbb{R}^D$ , el campo a valores reales  $\left(\sum_{i=1}^D \alpha_i X_i(t)\right)_{t \in T}$  es gaussiano en el sentido de la Definición 1.1.10.

La estacionariedad, tal como en la Definición 1.1.25 y comentarios posteriores, puede adecuarse de forma natural al caso de campos, tanto escalares como vectoriales, definidos en  $T \subset \mathbb{R}^d$ . Es inmediato además que si  $X_1, \dots, X_D$  son campos estacionarios a valores reales, entonces el campo vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$  también lo es. También valen resultados sobre continuidad y derivabilidad análogos a los presentados en la Sección 1.1, con las naturales adaptaciones. Veremos a continuación una síntesis de los más relevantes para nuestros propósitos, siguiendo el clásico [1].

**Definición 1.6.2.** Sea  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in T}$  un campo a valores reales, con espacio de parámetros incluido en  $\mathbb{R}^d$ .

1. Se dice que  $\mathcal{X}$  es *casi seguramente continuo* en  $t \in T$ , si para cada sucesión  $(t_n)$  de puntos en  $T$  tal que  $\|t_n - t\| \rightarrow 0$ , se verifica  $X(t_n) \rightarrow X(t)$  c.s..
2. Se dice que  $\mathcal{X}$  es *continuo en media cuadrática* en  $t \in T$  si para cada sucesión  $(t_n)$  de puntos en  $T$  tal que  $\|t_n - t\| \rightarrow 0$ , se verifica  $X(t_n) \rightarrow X(t)$  en  $L^2(\Omega)$ .

En cualquiera de los casos anteriores, la continuidad global del campo se obtiene si el mismo es continuo en todo  $t \in T$ . La continuidad casi segura en  $T$  es también referida como *continuidad de las trayectorias* del campo. Veamos a continuación algunas definiciones referidas a la derivabilidad de  $\mathcal{X}$ .

**Definición 1.6.3.** Sea  $\{e_1, \dots, e_d\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . En caso de existencia, al límite casi seguro

$$X_i(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t + he_i) - X(t)}{h} \quad (1.48)$$

lo llamamos *i-ésima derivada parcial* de  $\mathcal{X}$  en  $t$ . La función  $t \in T \mapsto X_i(t)$  es la función derivada parcial *i-ésima* de  $\mathcal{X}$ .

La condición de existencia se verifica si  $P\{\omega \in \Omega : \text{existe } X_i(t, \omega)\} = 1$ . Es común además el uso de la notación  $\frac{\partial X}{\partial t_i}$  para las derivadas parciales y en el presente trabajo emplearemos cualquiera de ellas. Para las derivadas de orden superior, utilizaremos indistintamente tanto  $X_{i_1, \dots, i_k}(t)$  como  $\frac{\partial^k X(t)}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}}$ .

**Definición 1.6.4.** En las condiciones de la Definición 1.6.3, si al límite en (1.48) lo consideramos en media cuadrática, a  $X_i(t)$  lo denominamos *i-ésima derivada parcial en media cuadrática* de  $\mathcal{X}$  en  $t$ .

Veamos ahora un par de resultados claves en el vínculo entre la regularidad de las trayectorias del campo y ciertas características de su función de covarianza, tal como se observó en el primer capítulo, en el contexto de parámetro real.

**Proposición 1.6.5.** Un campo  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in T}$  es continuo en media cuadrática en  $\tilde{t} \in T$ , si y solamente si su función de covarianza  $r$  es continua en  $(\tilde{t}, \tilde{t})$ . Si  $r$  es continua en todo  $(t, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , entonces es continua en todo punto.

**Proposición 1.6.6.** Si la derivada  $\frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial s_i \partial t_i}$  existe y es finita en  $(t, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , entonces existe el límite en media cuadrática  $X_i(t)$ , dado por (1.48).

Se puede demostrar que la función de covarianza del proceso  $X_i(\cdot)$  está dada por  $\frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial s_i \partial t_i}$  y puede extenderse este procedimiento a las derivadas de segundo orden  $X_{ij}(t)$ , obteniéndose que la función de covarianza de  $X_{ij}(\cdot)$  es  $\frac{\partial^4 r(s, t)}{\partial s_i \partial t_i \partial s_j \partial t_j}$ .

En el caso de que  $\mathcal{X}$  sea estacionario, la función de covarianza  $r(s, t)$  es función de la diferencia  $t - s$  únicamente. Si suponemos además que el campo es centrado, en ese caso diremos que la función de covarianza de  $\mathcal{X}$  es la función simétrica  $r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$r(t) = \mathbb{E}(X(0)X(t)).$$

Bajo la hipótesis de estacionariedad, de la Proposición 1.6.5 se deduce que la continuidad de  $r$  en el origen es suficiente para la continuidad en media cuadrática de  $\mathcal{X}$  en todo  $t \in T$ . También, si la  $2k$ -ésima derivada  $\frac{\partial^{2k} r(t)}{\partial^2 t_{i_1} \dots \partial^2 t_{i_k}}$  existe y es finita en  $t = 0$ , entonces la  $k$ -ésima derivada en media cuadrática  $X_{i_1 \dots i_k}(t)$  existe en todo  $t \in T$ .

Complementemos lo anterior con una extensión natural de los resultados obtenidos en la Subsección 1.5 referidos a representaciones espectrales. Consideremos un campo  $\mathcal{X}$  gaussiano, centrado y estacionario con función de covarianza  $r$ . Supongamos además que  $X(t) \in L^2(\Omega)$ , para todo  $t \in T$ . Puede entonces obtenerse una representación espectral de la covarianza de la forma

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t, \lambda \rangle) d\mu(\lambda), \quad (1.49)$$

donde  $\mu$  es la medida espectral de  $\mathcal{X}$ . Los *momentos espectrales* de  $\mathcal{X}$  son

$$\lambda_{i_1 \dots i_d} = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_d^{i_d} d\mu(\lambda),$$

para cada  $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_0^{+d}$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . De la estacionariedad del campo se deduce que  $r$  y  $\mu$  son simétricas, por lo que los momentos de orden impar, si existen, son nulos:

$$\lambda_{i_1 \dots i_d} = 0 \text{ si } \sum_{k=1}^d i_k \text{ es impar.}$$

De derivar sucesivamente en ambos miembros de (1.49) se obtiene  $\lambda_{i_1 i_2} = -\frac{\partial r(t)}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2}} \Big|_{t=0}$  y, en general, cualquier momento espectral de orden  $2k$ .

**Observación 1.6.7.** Destaquemos en este punto un comentario respecto a la independencia entre derivadas del campo  $\mathcal{X}$  en un punto  $t$ . Si  $t, s \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $r(t, s) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle s - t, \lambda \rangle) d\mu(\lambda)$ . Luego,

$$\mathbb{E}(X(t)X_i(t)) = \frac{\partial r(t, s)}{\partial s_i} \Big|_{t=s} = \lambda_i = 0,$$

por ser momento espectral de orden impar. De la misma manera,

$$\mathbb{E}(X_i(t)X_{jk}(t)) = \frac{\partial r(t, s)}{\partial t_i \partial s_j \partial s_k} \Big|_{t=s} = \lambda_{ijk} = 0.$$

Fijado  $t$ , las variables  $X(t)$  y  $X_i(t)$  son no correlacionadas. También lo son  $X_i(t)$  y  $X_{jk}(t)$ . Al ser  $\mathcal{X}$  y su derivadas campos gaussianos, la no correlación implica independencia.

**Definición 1.6.8.** Sean  $\mathcal{X}$  un campo gaussiano estacionario. Se dice que  $\mathcal{X}$  es *isotrópico* si para cada  $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  y cada  $f \in \text{SO}(d)$ <sup>5</sup>, se verifica

$$(X(f(t_1)), \dots, X(f(t_d))) = (X(t_1), \dots, X(t_d))$$

en distribución.

Naturalmente, un campo estacionario e isotrópico se caracteriza al verificarse

$$r(t) = r(\|t\|),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}^d$ . Si  $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una rotación, observemos que  $\|\theta(t)\| = \|t\|$ , para todo  $t$ . Bajo la hipótesis de isotropía, se tiene  $r(t) = r(\theta(t))$ , para todo  $t$ . Luego,

<sup>5</sup>Simbolizamos con  $\text{SO}(d)$  al grupo ortogonal especial de  $\mathbb{R}^d$  de todos los operadores ortogonales  $d$ -dimensionales, cuyo determinante es 1.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t, \lambda \rangle) d\mu(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle \theta(t), \lambda \rangle) d\mu(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t, \theta^{-1}(\lambda) \rangle) d\mu(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t, \lambda \rangle) d\mu_\theta(\lambda),
\end{aligned}$$

donde  $\mu_\theta$  es el *push-forward* de  $\mu$  por  $\theta$ , i.e.,  $\mu_\theta(B) = \mu(\theta^{-1}(B))$ , para todo boreliano  $B$ . Analicemos los argumentos usados aquí: la primera igualdad es consecuencia de  $r(t) = r(\theta(t))$  y la igualdad (1.49). En la segunda igualdad se ha utilizado la invariancia del producto interno por rotaciones y en la tercera igualdad la fórmula de cambio de variables. Como lo anterior vale para todo  $t$ , se obtiene que  $\mu_\theta = \mu$ . En otras palabras, la medida espectral es invariante por rotaciones y, en caso de que sea absolutamente continua, su densidad espectral dependerá únicamente del módulo de  $\lambda$ . Una importante consecuencia de lo anterior es que, fijado  $t$ , se verifica

$$\mathbb{E}(X_i(t)X_j(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_i \lambda_j d\mu(\lambda) = \delta_{ij} \lambda_2, \quad (1.50)$$

siendo  $\delta$  la delta de Kronecker y  $\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_{ii}^2 d\mu(\lambda) \geq 0$ . Por la simetría de la medida espectral, el valor de  $\lambda_2$  es independiente de  $i$ .

## 1.7. Teorema del cuarto momento

Esta breve sección contiene resultados que son consecuencias del Teorema 1 en [19], en el que se demuestra que la convergencia en distribución de una sucesión de MWI a una variable gaussiana centrada, equivale a la convergencia del correspondiente cuarto momento. El referido resultado es conocido como *criterio de Nualart-Peccati* o también *teorema del cuarto momento*. El abordaje que haremos a continuación sigue el tratamiento dado en [17]. Consideremos las suposiciones hechas en los comentarios previos al Teorema 1.3.1.

**Teorema 1.7.1.** *Sea  $q \geq 2$  y consideremos una sucesión  $(g_n)_{n \geq 1}$  en  $L_s^2(T^q)$ , el espacio de funciones simétricas de cuadrado integrable definidas en  $T^q$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea  $G_n = I_q(g_n)$ , tal que  $\lim_n \mathbb{E}(G_n^2) = \sigma^2 > 0$ . Entonces, son equivalentes:*

1.  $G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \sim N(0, \sigma^2)$ .
2.  $\lim_n \mathbb{E}(G_n^4) = 3\sigma^2 = \mathbb{E}(N^4)$ .
3.  $\lim_n \|g_n \otimes_k g_n\|_{L^2(T^{2q-2k})} = 0$ , para cada  $k \in \{1, \dots, q-1\}$ .

Una demostración del Teorema 1.7.1 en la que se utilizan técnicas del denominado *cálculo de Malliavin*, puede encontrarse en [17]. Una demostración de una versión algo más restrictiva, basada fundamentalmente en argumentos más elementales, de tipo combinatorio, se hace en [16].

El siguiente resultado (Teorema 6.2.3 en [17]) nos dice que en el caso de una sucesión de vectores de integrales múltiples de Wiener-Itô, la convergencia de las componentes equivale a la convergencia conjunta. Esto será esencial en la demostración de teoremas tipo Breuer-Major.

**Teorema 1.7.2.** *Sean  $d \geq 2$  y  $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Z}^+$ . Consideremos una sucesión de núcleos  $(g_{d,n})_{n \geq 1}$ , con*

$$g_{d,n} = (g_{q_1,n}, \dots, g_{q_d,n}),$$

*siendo  $g_{q_i,n} \in L_s^2(T^{q_i})$ , para todo  $n \geq 1$  y para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Sea para cada  $n$ , el vector*

$$G_{d,n} = (I_{q_1}(g_{q_1,n}), \dots, I_{q_d}(g_{q_d,n})). \quad (1.51)$$

Supongamos que existe  $\Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , una matriz simétrica semidefinida positiva, de forma tal que

$$\lim_n \mathbb{E} (I_{q_i}(g_{q_i,n}) I_{q_j}(g_{q_j,n})) = \Sigma(i, j), \quad (1.52)$$

con  $1 \leq i, j \leq d$ . Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $G_{d,n}$  converge en ley, si  $n \rightarrow +\infty$ , a un vector  $d$ -dimensional gaussiano  $N \sim N_d(0, \Sigma)$ .
2. Para cada  $1 \leq i \leq d$ ,  $I_{q_i}(g_{q_i,n})$  converge en ley a  $N(0, \Sigma(i, i))$ , si  $n \rightarrow +\infty$ .

**Observación 1.7.3.** En los siguientes capítulos, los dos últimos resultados serán utilizados de forma combinada: para probar la convergencia débil de cada componente de (1.51) se utilizará la tercera condición en el Teorema 1.7.1. Es conveniente notar sin embargo que mientras se tiene como premisa que la matriz de covarianzas límite  $\Sigma$  en (1.52) es semidefinida positiva, en el enunciado del teorema de cuarto momento se tiene que  $\sigma^2 > 0$ . Esta brecha puede salvarse utilizando argumentos estándar: supongamos  $\lim_n \mathbb{E}(G_n^2) = 0$  y sea  $f_n(t) = \mathbb{E}(e^{itG_n})$ , la función característica de cada  $G_n$ . Se tiene entonces

$$\lim_n f_n(t) = \lim_n e^{-\frac{\mathbb{E}(G_n^2)t^2}{2}} = 1,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por ser la constante 1 la función característica de la variable degenerada centrada en 0 (que puede considerarse como  $N \sim N(0, 0)$ ), la convergencia puntual de la sucesión  $(f_n)$  es suficiente para que se verifique la convergencia en distribución de  $G_n$  a  $N$ .

## 1.8. Rango de Hermite y desigualdad de Arcones

**Definición 1.8.1.** Sea  $\xi$  un vector  $d$ -dimensional gaussiano estándar. Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \phi_d(x)dx)$ . Definimos el *rango de Hermite* de  $f$  como

$$\rho(f) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ tal que } |\mathbf{n}| = k \text{ y } \mathbb{E} \left( (f(\xi) - \mathbb{E}(f(\xi))) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) \neq 0 \right\}.$$

Para cada  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ , sea  $c_{\mathbf{n}}$  el coeficiente de Hermite en la expansión de  $f$  dado por

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}!}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(x) \phi_d(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}!}} \mathbb{E} \left( f(\xi) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( (f(\xi) - \mathbb{E}(f(\xi))) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) &= \mathbb{E} \left( f(\xi) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) - \mathbb{E}(f(\xi)) \mathbb{E} \left( \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( f(\xi) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) \\ &= \sqrt{\mathbf{n}!} c_{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $\tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi)$  es una variable centrada. En definitiva,

$$\mathbb{E} \left( (f(\xi) - \mathbb{E}(f(\xi))) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(\xi) \right) \neq 0 \iff c_{\mathbf{n}} \neq 0.$$

Se obtiene así la siguiente caracterización alternativa del rango de Hermite:

$$\rho(f) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ tal que } |\mathbf{n}| = k \text{ y } c_{\mathbf{n}} \neq 0 \right\}.$$

La siguiente Proposición, de gran relevancia en capítulos posteriores, es una adecuación del Lema 1 en [3].

**Proposición 1.8.2 (desigualdad de Arcones).** Sean  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$  y  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$  dos vectores gaussianos estándar con covarianza  $r(j, k) = \mathbb{E}(\xi_j \eta_k)$  y  $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \phi_d(x)dx)$  de rango de Hermite  $\rho(f)$  y tal que  $\mathbb{E}(f(\xi)) = \mathbb{E}(f(\eta)) = 0$ . Supongamos que

$$\psi := \max \left\{ \sup_{1 \leq j \leq d} \sum_{k=1}^d |r(j, k)|, \sup_{1 \leq k \leq d} \sum_{j=1}^d |r(j, k)| \right\} \leq 1.$$

Entonces,

$$|\mathbb{E}[f(\xi)f(\eta)]| \leq \psi^{\rho(f)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \phi_d(x)dx)}^2. \quad (1.53)$$



## Capítulo 2

# Funcionales de ocupación de procesos gaussianos estacionarios: tiempo local y número de cruces

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y consideremos que  $\mathcal{X} = \{X(s)\}_{s \geq 0}$  es un proceso gaussiano a valores reales estacionario, centrado y con función de covarianza  $r$ . Supongamos además que  $\mathcal{X}$  tiene densidad espectral, esto es, que existe una función real  $f$  tal que

$$r(s) = \int_{\mathbb{R}} \cos(s\lambda) f(\lambda) d\lambda. \quad (2.1)$$

En el presente capítulo nos ocuparemos del estudio de dos de los denominados *funcionales de ocupación* de  $\mathcal{X}$ . A saber,

1. el tiempo local de  $\mathcal{X}$ , a nivel  $x$  en tiempo  $t$ , que simbolizaremos  $L_t(x)$ ,
2. el número de cruces de  $\mathcal{X}$ , a nivel  $u$  en tiempo  $t$ , que simbolizaremos  $N_{[0,t]}(u)$ .

Como vimos, la regularidad de las trayectorias de  $\mathcal{X}$  está asociada a las características de  $r$ , las que serán explicitadas en cada caso. Se obtienen expansiones de Hermite para cada uno de los referidos funcionales, lo que además de tener un interés en sí mismo, proporciona las bases para la obtención de un TCL para cada uno de ellos en el siguiente capítulo. Simbolizaremos con  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  al espacio de Hilbert gaussiano de funcionales reales de cuadrado integrable generado por  $\mathcal{X}$ . Por el Teorema 1.2.22 se verifica

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}) = \bigoplus_{q=0}^{+\infty} K_q, \quad (2.2)$$

donde  $\{K_q : q \geq 0\}$  es una familia de subespacios ortogonales de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , donde  $\mathcal{A}$  es generada por  $\mathcal{X}$ . Antes de pasar al estudio de los funcionales antes mencionados, veamos un par de lemas que necesitaremos más adelante al obtener expresiones integrales para los referidos funcionales. Ambos son consecuencia de la *fórmula de Mehler*, Proposición 1.4.1.

**Lema 2.0.1.** *Si  $(X(s))_{s \geq 0}$  es un proceso gaussiano centrado y estacionario con función de covarianza  $r$ , entonces, la integral de Riemann  $\int_0^t H_q(X(s)) ds$  pertenece a  $K_q$ , el caos homogéneo de orden  $q$ .*

*Demostración.* Sean  $\Delta_m = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_m = t\}$  y  $\tilde{\Delta}_n = \{0 = u_0, u_1, \dots, u_n = t\}$  dos particiones del intervalo  $[0, t]$ . Se definen las sumas de Riemann correspondientes

$$S_m = \sum_{j=1}^m H_q(X(s_j^*)) \Delta s_j \quad \text{y} \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n H_q(X(u_k^*)) \tilde{\Delta} u_k,$$

donde  $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$ ,  $\tilde{\Delta} u_k = u_k - u_{k-1}$ ,  $s_j^* \in [s_{j-1}, s_j]$  y  $u_k^* \in [u_{k-1}, u_k]$ , para  $j \in \{1, \dots, m\}$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Evidentemente  $S_m, \tilde{S}_n \in K_q$  y además por la estacionariedad del proceso y por (1.35), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( S_m \tilde{S}_n \right) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mathbb{E} (H_q(X(s_j^*)) H_q(X(u_k^*)) \Delta s_j \tilde{\Delta} u_k) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n q! r^q(s_j^* - u_k^*) \Delta s_j \tilde{\Delta} u_k. \end{aligned}$$

Si  $m, n \rightarrow +\infty$ , la expresión anterior tiende a la constante dada por  $C_q := q! \int_0^t \int_0^t r^q(s - u) ds du$ .

Supongamos ahora que tenemos la sucesión  $(S_n)_{n \geq 1}$  de sumas de Riemann como las anteriores. Es sencillo ver que esta sucesión es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . En efecto,

$$\mathbb{E} \left( (S_m - S_n)^2 \right) = \underbrace{\mathbb{E} (S_m^2)}_{\rightarrow C_q} - 2 \underbrace{\mathbb{E} (S_m S_n)}_{\rightarrow C_q} + \underbrace{\mathbb{E} (S_n^2)}_{\rightarrow C_q} \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

si  $m, n \rightarrow +\infty$ . Por la completitud de  $K_q$ , se obtiene el resultado buscado. □

**Lema 2.0.2.** Si  $(X(s))_{s \geq 0}$  es un proceso gaussiano centrado y estacionario con función de covarianza  $r$  y  $\mathcal{J}_q = \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds$ , entonces,  $\mathcal{J}_q \in K_q$ .

*Demostración.* Mantengamos la notación referida a las particiones utilizada en la demostración del Lema 2.0.1 y escribamos

$$S_m = \sum_{j=1}^m H_{q-2l}(X(s_j^*)) H_{2l}(X'(s_j^*)) \Delta s_j \quad \text{y} \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n H_{q-2l}(X(u_k^*)) H_{2l}(X'(u_k^*)) \tilde{\Delta} u_k.$$

Por (1.36) y por la estacionariedad del proceso,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( S_m \tilde{S}_n \right) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( H_{q-2l}(X(s_j^*)) H_{2l}(X'(s_j^*)) H_{q-2l}(X(u_k^*)) H_{2l}(X'(u_k^*)) \Delta s_j \tilde{\Delta} u_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in Z} \frac{(q-2l)!^2 (2l)!^2}{d_1! d_2! d_3! d_4!} r(u_k^* - s_j^*)^{d_1} r'(u_k^* - s_j^*)^{d_2 + d_3} (-r''(u_k^* - s_j^*))^{d_4} \Delta s_j \tilde{\Delta} u_k, \end{aligned}$$

siendo  $Z$  el conjunto de soluciones  $(d_1, d_2, d_3, d_4)$  de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-2l \\ q-2l \\ 2l \\ 2l \end{pmatrix}.$$

Resolviendo se obtiene  $Z = \left\{ (q-4l+\kappa, 2l-\kappa, 2l-\kappa, \kappa) \in \mathbb{Z}^{+4} : \max\{0, 4l-q\} \leq \kappa \leq 2l \right\}$ . Observando que  $Z$  tiene a lo sumo  $2l+1$  elementos, podemos escribir

$$\mathbb{E} \left( S_m \tilde{S}_n \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{\kappa} \frac{(q-2l)!^2}{(q-4l+\kappa)! \kappa!} r(u_k^* - s_j^*)^{q-4l+\kappa} r'(u_k^* - s_j^*)^{4l} (-r''(u_k^* - s_j^*))^{\kappa} \Delta s_j \tilde{\Delta} u_k.$$

Al pasar al límite  $m, n \rightarrow +\infty$  en la expresión anterior se obtiene

$$\mathbb{E} \left( S_m \tilde{S}_n \right) \rightarrow C_q := \int_0^t \int_0^t \sum_{\kappa} \frac{(q-2l)!^2}{(q-4l+\kappa)! \kappa!} r(u-s)^{q-4l+\kappa} r'(u-s)^{4l} (-r''(u-s))^{\kappa} ds du$$

y la prueba se concluye con el mismo argumento que el usado en (2.3). □

## 2.1. Tiempo local

### 2.1.1. Introducción y fórmulas derivadas

Supongamos que existen  $C > 0$  y  $0 < h < 1$  tales que

$$r(s) = 1 - C^2 s^{2h} + o(s^{2h}), \text{ si } s \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Fijemos para lo que sigue,  $x \in \mathbb{R}$ . Para cada  $t > 0$ , se define la función *tiempo de ocupación* de  $\mathcal{X}$ , de nivel  $x$  durante el tiempo  $t$ , como  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x) = \int_0^t \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(X(s)) ds. \quad (2.5)$$

Observemos que para casi todo  $\omega \in \Omega$  fijo,  $F(\cdot, \omega)$  puede interpretarse como la función de distribución de  $\eta : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$\eta(s) = X(s, \omega), \quad (2.6)$$

vista como una variable aleatoria definida en  $[0, t]$  con la medida de Lebesgue normalizada  $m := ds/t$  (ver, por ejemplo, [11]). Podemos pensar que la función  $F$  mide la cantidad de tiempo en el intervalo  $[0, t]$  en la que la trayectoria  $X(\cdot, \omega)$  está *por debajo* de  $x$ .

Si  $f$  es una función a valores reales o complejos Borel-medible, mediante un cambio de variables adecuado se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \int_0^t f(X(s)) ds, \quad (2.7)$$

en el sentido de que ambas integrales o coinciden o son ambas divergentes. Esta igualdad (que vincula una integral *espacial* con una integral *temporal*) resultará muy útil en nuestro desarrollo. Ya como una primera aplicación se obtiene una expresión conveniente para la función característica de  $F$ :

$$\hat{\eta}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x) = \int_0^t e^{iuX(s)} ds. \quad (2.8)$$

Si  $F$  es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, a su derivada de Radon-Nikodym le llamamos *tiempo local* de  $\mathcal{X}$ , de nivel  $x$  durante el tiempo  $t$ , y la simbolizamos  $L_t(x, \omega)$  o simplemente  $L_t(x)$ . En ese caso, podemos obtener una representación integral para el tiempo local de la siguiente manera: si  $\delta > 0$ , de la ecuación (2.7) resulta

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(y) L_t(y) dy.$$

Dividiendo entre  $2\delta$ , por el teorema de diferenciación de Lebesgue se llega a

$$L_t(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbf{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) ds, \quad (2.9)$$

que es la representación que tendremos de aquí en más como definición de tiempo local de  $\mathcal{X}$ , siendo  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ .

Hacemos a continuación una breve digresión presentando un sencillo resultado de Análisis Real que necesitaremos en breve.

**Lema 2.1.1.** *Sea  $(A, \mathcal{G}, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones que converge a  $f$  en  $L^2(A)$  y sea  $g \in L^2(A)$ . Entonces,*

$$\lim_n \int f_n g d\mu = \int f g d\mu. \quad (2.10)$$

*Demostración.* Si  $\|\cdot\|_2$  es la norma en  $L^2(A)$ , por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\int |f_n g - f g| d\mu \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2.$$

De lo anterior, como  $f_n \rightarrow f$  en  $L^2(A)$ , resulta que  $f_n g \rightarrow f g$  en  $L^1(A)$ . De la continuidad del producto interno en  $L^2(A)$  se deduce (2.10). □

Veamos a continuación que las premisas presentadas al comienzo de la sección garantizan la existencia del tiempo local, tal como fuera definido en (2.9).

**Proposición 2.1.2.** *Si se verifica la condición (2.4), entonces para casi todo  $\omega \in \Omega$  la función tiempo de ocupación (2.5) es absolutamente continua y  $L_t(\cdot, \omega)$  es cuadrado integrable.*

*Demostración.* Supongamos que hemos probado la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t \int_0^t \mathbb{E} \left( e^{iu[X(s) - X(s')]} \right) ds ds' \right| du < \infty. \quad (2.11)$$

Es sencillo verificar que esto implica que

$$\mathbb{E} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t e^{iuX(s)} ds \right|^2 du \right) < \infty.$$

Luego, para casi todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t e^{iuX(s)} ds \right|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}(u)|^2 du < \infty, \quad (2.12)$$

es decir que  $\hat{\eta} \in L^2(\mathbb{R})$ .

Para casi todo  $\omega \in \Omega$ , podemos definir el funcional lineal  $S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \hat{\eta}(-u) du$$

donde  $\hat{g}$  es la transformada de Fourier de  $g$  y  $\hat{\eta}$  es como en (2.8). Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el teorema de Plancherel y (2.12),

$$|S(g)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}(u)|^2 du < \infty.$$

Luego,  $S$  es acotado y por el teorema de representación de Riesz, existe  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tal que para toda  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Podemos considerar particularmente el caso en el que  $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$ , siendo  $[a, b] \subseteq [0, t]$  un intervalo cualquiera, y escribir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \hat{\eta}(-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iub} - e^{iua}}{u} \hat{\eta}(-u) du. \end{aligned}$$

Por la fórmula de inversión, lo anterior es  $F(b) - F(a)$  si  $a$  y  $b$  son de continuidad de  $F$ . Como  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces es integrable en todo intervalo finito y, como consecuencia, su integral indefinida es absolutamente continua. Por lo anterior,  $F$  no puede tener discontinuidades y se deduce que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

para todos  $a, b$  en las condiciones dadas. Queda así probado que  $f$  es la derivada de  $F$ .

Lo probado hasta ahora indica que la condición (2.11) implica lo que queremos probar. Veamos entonces a continuación que (2.4) es suficiente para que se verifique dicha condición: para cada  $0 \leq s \neq s' \leq t$ , sea  $\widehat{\xi}_{s,s'}(u) = \mathbb{E} \left( e^{iu[X(s) - X(s')]} \right)$ , la función característica de la variable gaussiana  $\xi_{s,s'} = X(s) - X(s')$ , que es centrada y con varianza

$$\mathbb{E}(\xi_{s,s'}^2) = 2(1 - r(s' - s)),$$

por la estacionariedad de  $\mathcal{X}$ . La densidad de  $\xi$  es

$$p_{s,s'}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(1-r(s'-s))}}}{2\sqrt{\pi(1-r(s'-s))}}. \quad (2.13)$$

Por ser  $\xi_{s,s'}$  gaussiana, se verifica que su función característica es integrable y se tiene la fórmula de inversión (ver, por ejemplo, [21]):

$$p_{s,s'}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \widehat{\xi}_{s,s'}(u) du. \quad (2.14)$$

Luego, por (2.13) y (2.14), evaluando en  $x = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\xi}_{s,s'}(u) du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-r(s-s')}}.$$

Lo anterior nos da las condiciones para probar la desigualdad (2.11):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t \int_0^t \mathbb{E} \left( e^{iu[X(s) - X(s')]} \right) ds ds' \right| du &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t \int_0^t \widehat{\xi}_{s,s'}(u) ds ds' \right| du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_0^t \widehat{\xi}_{s,s'}(u) ds ds' du \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-r(s-s')}} ds ds' \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_0^t \frac{t-s}{\sqrt{1-r(s)}} ds. \end{aligned}$$

La integral del último miembro de la desigualdad anterior es convergente como consecuencia de (2.4). Basta observar que

$$\frac{t-s}{\sqrt{1-r(s)}} \sim \frac{t}{Cs^h},$$

si  $s \rightarrow 0$ . Esto concluye la prueba. □

Adoptemos la siguiente convención notacional: simbolicemos con  $\phi(x, y, \rho)$  a la densidad gaussiana bidimensional con distribución  $N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$ . En el siguiente resultado se obtienen expresiones para los primeros dos momentos del tiempo local.

**Proposición 2.1.3.** *En las condiciones formuladas al comienzo de la subsección, se verifica  $L_t(x) \in L^2(\Omega)$ . Además,*

$$\mathbb{E}[L_t(x)] = t\phi(x) \quad (2.15)$$

y

$$\mathbb{E}[L_t^2(x)] = \int_0^t \frac{(t-s)e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\pi\sqrt{1-r^2(s)}} ds. \quad (2.16)$$

*Demostración.* Para cada  $\delta > 0$ , sea

$$L_t^\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_t^\delta(x)] &= \frac{1}{2\delta} \int_0^t P\{X(0) \in [x-\delta, x+\delta]\} ds \\ &= \frac{t}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \phi(u) du, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la estacionariedad del proceso y el teorema de Tonelli. Luego, resulta

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E}[L_t^\delta(x)] = t\phi(x). \quad (2.17)$$

De forma similar a lo ya obtenido, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E}[L_t^\delta(x)^2] &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{4\delta^2} \int_0^t \int_0^t P\{(X(s), X(s')) \in [x-\delta, x+\delta]^2\} ds ds' \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{4\delta^2} \int_0^t \int_0^t \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} p_{X(s), X(s')}(u, u') du du' ds ds' \\ &= \int_0^t \int_0^t p_{X(s), X(s')}(x, x) ds ds' \\ &= \int_0^t \int_0^t \phi(x, x, r(s' - s)) ds ds' \\ &= \int_0^t \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s' - s)}}}{2\pi\sqrt{1-r^2(s' - s)}} ds ds' \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\pi\sqrt{1-r^2(s)}} ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta integral es convergente. En efecto, de (2.4) se deduce la convergencia en 0 de  $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-r^2(s)}}$  (esto alcanza porque el numerador en el integrando es acotado). Basta observar que  $r(s) = 1 - C^2 s^{2h} + o(s^{2h})$ , siendo  $0 < h < 1$  y  $C > 0$ . Luego,  $\sqrt{1-r^2(s)} \sim \sqrt{2}Cs^h$ , si  $s \rightarrow 0$ .

Es sencillo ver que para obtener (2.15) y (2.16) a partir de lo deducido en (2.17) y en (2.18), respectivamente, debe justificarse convenientemente intercambios entre límite y esperanza. Con ese fin, comencemos viendo que la familia  $(L_t^\delta(x))_{\delta > 0}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . Si  $\delta, \delta' > 0$ , entonces

$$\mathbb{E}\left[\left|L_t^\delta(x) - L_t^{\delta'}(x)\right|^2\right] = \mathbb{E}[L_t^\delta(x)^2] - 2\mathbb{E}[L_t^\delta(x)L_t^{\delta'}(x)] + \mathbb{E}[L_t^{\delta'}(x)^2].$$

De acuerdo a (2.18), el primer y el tercer sumando en el segundo miembro de la igualdad anterior convergen ambos a  $\ell := \int_0^t \frac{(t-s)e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\pi\sqrt{1-r^2(s)}} ds$ , si  $\delta \downarrow 0$ . Habremos demostrado que la referida familia es de Cauchy si se demuestra que  $\lim_{\delta, \delta' \downarrow 0} \mathbb{E} [L_t^\delta(x) L_t^{\delta'}(x)] = \ell$ . Ocupémonos de eso ahora.

$$\mathbb{E} [L_t^\delta(x) L_t^{\delta'}(x)] = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{4\delta\delta'} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) \mathbb{1}_{[x-\delta', x+\delta']}(X(s'))] ds ds'. \quad (2.19)$$

El integrando en el segundo miembro de la igualdad anterior puede escribirse

$$\frac{1}{4\delta\delta'} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) \mathbb{1}_{[x-\delta', x+\delta']}(X(s'))] = \frac{1}{4\delta\delta'} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{x-\delta'}^{x+\delta'} \phi(u, u', r(s' - s)) du du'.$$

Hagamos aquí dos observaciones. En primer lugar, mediante un argumento estándar de pasaje al límite resulta

$$\lim_{\delta, \delta' \downarrow 0} \frac{1}{4\delta\delta'} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) \mathbb{1}_{[x-\delta', x+\delta']}(X(s'))] = \phi(x, x, r(s' - s)). \quad (2.20)$$

La segunda observación es que, fijados  $\delta$  y  $\delta'$ , se obtiene mediante un cambio de variable lineal

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\delta\delta'} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{x-\delta'}^{x+\delta'} \phi(u, u', r(s' - s)) du du' &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(x + \delta w, x + \delta' w', r(s' - s)) dw dw' \\ &\leq \phi(0, 0, r(s' - s)) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2(s' - s)}}. \end{aligned}$$

El último miembro en la desigualdad anterior es el término de una integral (en  $s, s'$ ) convergente, lo que puede probarse usando los mismos argumentos expuestos en los comentarios posteriores a la igualdad (2.18). Como hemos obtenido que el integrando en (2.19) está acotado superiormente por una función en  $L^1([0, t]^2)$ , por el teorema de convergencia dominada y por (2.20) podemos concluir

$$\begin{aligned} \lim_{\delta, \delta' \downarrow 0} \mathbb{E} [L_t^\delta(x) L_t^{\delta'}(x)] &= \lim_{\delta, \delta' \downarrow 0} \int_0^t \int_0^t \frac{1}{4\delta\delta'} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s)) \mathbb{1}_{[x-\delta', x+\delta']}(X(s'))] ds ds' \\ &= \int_0^t \int_0^t \phi(x, x, r(s' - s)) ds ds' \\ &= 2 \int_0^t (t - v) \phi(x, x, r(v)) dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t (t - v) \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(v)}}}{\sqrt{1-r^2(v)}} dv \\ &= \ell. \end{aligned}$$

Queda entonces así demostrado que la familia  $(L_t^\delta(x))_{\delta>0}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ .

De lo probado hasta ahora se obtiene inmediatamente que  $L_t^\delta(x)$  converge en  $L^2(\Omega)$  a  $L_t(x)$ , si  $\delta \downarrow 0$ . Por la continuidad de la norma cuadrática, resulta

$$\|L_t(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{\delta \downarrow 0} \|L_t^\delta(x)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [L_t^2(x)] &= \lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E} [L_t^\delta(x)^2] \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\pi\sqrt{1-r^2(s)}} ds, \end{aligned}$$

quedando así probada la igualdad (2.16). Como la convergencia en  $L^2(\Omega)$  implica la convergencia en  $L^1(\Omega)$ , de la continuidad de la norma  $L^1$ , se deduce con argumentos similares a los ya utilizados, la igualdad (2.15). Con esto concluye la demostración.  $\square$

### 2.1.2. Expansión de Hermite del tiempo local

Sea  $\phi(x, y, \rho)$  como se definió previo a la Proposición 2.1.3. Una conocida identidad de Mehler indica que vale la igualdad

$$\phi(x, y, \rho) = \phi(x)\phi(y) \sum_{q \geq 0} \frac{H_q(x)H_q(y)}{q!} \rho^q, \quad (2.21)$$

que será esencial en la obtención de un desarrollo de Hermite para el tiempo local.

**Proposición 2.1.4.** *Para  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ , sea*

$$\widetilde{L}_t(x) = \sum_{q \geq 0} \frac{\phi(x)H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds. \quad (2.22)$$

*Entonces,  $L_t(x) = \widetilde{L}_t(x)$ , casi seguramente.*

Tengamos presente que, de acuerdo al Lema 2.0.1, se verifica que  $\int_0^t H_q(X(s)) ds \in K_q$ , por lo que la Proposición 2.1.4 dice que (2.22) es efectivamente el desarrollo del tiempo local en caos de Wiener.

*Demostración.* Comencemos diciendo que una posible heurística detrás de (2.22) puede verse en el Apéndice, de donde puede deducirse además que  $\mathbb{E}(L_t^2(x)) = \mathbb{E}(\widetilde{L}_t^2(x))$ . De esta igualdad y de propiedades elementales de espacios con producto interno, obtenemos que para probar la igualdad casi segura de  $L_t(x)$  y  $\widetilde{L}_t(x)$  alcanza con verificar que  $\mathbb{E}(\widetilde{L}_t(x)L_t(x)) = \mathbb{E}(L_t^2(x))$ . Comenzamos entonces escribiendo

$$\mathbb{E}(\widetilde{L}_t(x)L_t(x)) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^Q \frac{\phi(x)H_q(x)}{q!} \mathbb{E}\left[L_t(x) \int_0^t H_q(X(s)) ds\right], \quad (2.23)$$

donde el intercambio entre límite y esperanza está justificado por el Lema 2.1.1.

Desarrollando la esperanza en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[L_t(x) \int_0^t H_q(X(s)) ds\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s')) ds' \int_0^t H_q(X(s)) ds\right] \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s')) ds' \int_0^t H_q(X(s)) ds\right] \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s')) H_q(X(s))] ds ds' \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t (t-u) \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(0)) H_q(X(u))] du. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Las igualdades anteriores deben justificarse adecuadamente. Si  $\delta \rightarrow 0$ , entonces casi seguramente

$$\frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(s')) ds'$$

converge al tiempo local (que pertenece a  $L^2(\Omega)$ , de acuerdo a lo ya probado) y también  $\int_0^t H_q(X(s)) ds \in L^2(\Omega)$ , de acuerdo al Lema 2.0.1. Luego, la validez del intercambio entre límite y esperanza en la segunda igualdad es consecuencia del Lema 2.1.1. La tercera igualdad es consecuencia del teorema de Fubini. La última igualdad es



consecuencia de la estacionariedad del proceso.

Observemos que en  $L^2(\Omega)$  se tiene el desarrollo

$$\mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(X(0)) = \sum_{q' \geq 0} c_{q'}(x, \delta) H_{q'}(X(0)), \quad (2.25)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{q'}(x, \delta) &= \frac{1}{q'!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[x-\delta, x+\delta]}(v) H_{q'}(v) \phi(v) dv \\ &= \frac{1}{q'!} \int_{x-\delta}^{x+\delta} H_{q'}(v) \phi(v) dv. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observemos aquí para futura referencia que de (2.26) se deduce:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} c_{q'}(x, \delta) = \frac{1}{q'!} H_{q'}(x) \phi(x). \quad (2.27)$$

Fijado  $\delta > 0$ , a los efectos de simplificar la notación, sean

$$F_\delta = \sum_{q' \geq 0} c_{q'}(x, \delta) H_{q'}(X(0)),$$

donde la convergencia es en  $L^2(\Omega)$ , y para cada  $Q' > 0$ ,

$$F_\delta^{Q'} = \sum_{q'=0}^{Q'} c_{q'}(x, \delta) H_{q'}(X(0)).$$

Entonces, por el Lema 2.1.1,

$$\mathbb{E} \left[ F_\delta^{Q'} H_q(X(s)) \right] \rightarrow \mathbb{E} [F_\delta H_q(X(s))], \quad (2.28)$$

si  $Q' \rightarrow +\infty$ .

Retomando ahora la igualdad (2.24)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ L_t(x) \int_0^t H_q(X(s)) ds \right] &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t (t-u) \mathbb{E} [F_\delta H_q(X(u))] du \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t (t-u) \left( \lim_{Q' \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [F_\delta^{Q'} H_q(X(u))] \right) du \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t (t-u) \left( \lim_{Q' \rightarrow +\infty} \sum_{q'=0}^{Q'} c_{q'}(x, \delta) \mathbb{E} [H_{q'}(X(0)) H_q(X(u))] \right) du \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{q!}{\delta} \int_0^t (t-u) c_q(x, \delta) r^q(u) du \\ &= 2 \int_0^t (t-u) H_q(x) \phi(x) r^q(u) du, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (2.28), la fórmula de Mehler (1.35) y (2.27).

Luego, volviendo a (2.23), al simplificar y pasar al límite en  $Q$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \widetilde{L}_t(x) L_t(x) \right) &= 2 \int_0^t (t-u) \phi^2(x) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{H_q^2(x)}{q!} r^q(u) du \\
&= 2 \int_0^t (t-u) \phi(x, x, r(u)) du \\
&= \int_0^t \frac{(t-u) e^{-\frac{x^2}{1+r(u)}}}{\pi \sqrt{1-r^2(u)}} du \\
&= \mathbb{E} (L_t^2(x)),
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la igualdad (2.21). Con esto se concluye la prueba. □

## 2.2. Número de cruces a nivel $u$

### 2.2.1. Introducción y fórmulas derivadas

Consideremos fijos  $t > 0$  y  $u \in \mathbb{R}$  y centremos nuestro interés en la variable aleatoria

$$N_{[0,t]}^X(u) = \# \{s \in [0, t] : X(s) = u\},$$

a la que denominaremos *número de cruces* de  $\mathcal{X}$  a nivel  $u$  en tiempo  $t$ . Para el tratamiento de esta nueva variable y sus características de interés, la cuestión que se impone inmediatamente es la de cómo abordar su estudio. Un posible punto de ataque para comprender la heurística en el tratamiento del problema antes descrito es comenzar con una mirada determinística, a través de la denominada *fórmula del contador* de Kac.

**Proposición 2.2.1 (Fórmula del contador de Kac).** Sean  $g \in C^1([a, b])$  y  $u \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $g(a) \neq u$ , que  $g(b) \neq u$  y que  $\{t \in [a, b] : g(t) = u, g'(t) = 0\} = \emptyset$ . Sea  $N_{[0,t]}^g(u) = \# \{s \in [a, b] : g(s) = u\}$ . Entonces,

$$N_{[a,b]}^g(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_a^b \mathbb{1}_{\{|g(t)-u| < \delta\}} |g'(t)| dt. \quad (2.29)$$

*Demostración.* Con argumentos estándar de análisis se puede determinar que el número de cruces es finito; supongamos entonces que  $N_{[0,t]}^g(u) = n$ . Si  $n = 0$ , el resultado se obtiene al observar que para  $\delta$  suficientemente pequeño, el integrando en (2.29) se anula. Supongamos entonces que  $\{s \in [a, b] : g(s) = u\} = \{c_1, \dots, c_n\}$ . Si  $\delta$  es suficientemente pequeño, la preimagen por  $g$  de  $(u - \delta, u + \delta)$  es un conjunto de  $n$  intervalos  $I_1, \dots, I_n$ , disjuntos dos a dos, que contienen los puntos  $s_1, \dots, s_n$ , verificándose que en cada uno de esos intervalos  $g$  es monótona. Luego, para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  se obtiene  $\int_{I_k} |g'(t)| dt = 2\delta$ , de donde se deduce de forma sencilla lo que queremos probar. Puede observarse además que el límite es alcanzado, esto es, existe  $\delta$  suficientemente pequeño tal que  $N_{[a,b]}^g(u) = \frac{1}{2\delta} \int_a^b \mathbb{1}_{\{|g(t)-u| < \delta\}} |g'(t)| dt$ . □

La demostración del siguiente resultado, conocido como *fórmula del área*, puede encontrarse en [4].

**Proposición 2.2.2.** Sean  $u \in \mathbb{R}^d$  y  $g$  una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^d$  y a valores en  $\mathbb{R}^d$ , tal que el conjunto de puntos críticos de  $g$  a nivel  $u$ , tiene medida de Lebesgue nula. Para cada  $t \in \mathcal{U}$ , sea  $g'(t)$  la matriz jacobiana de  $g(t)$ . Para cada  $\mathcal{B}$ , boreliano de  $\mathcal{U}$ , simbolicemos con  $N_u(g, \mathcal{B})$  al cardinal de  $\{t \in \mathcal{B} : g(t) = u\}$ . Sea además  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u) N_u(g, \mathcal{B}) du = \int_{\mathcal{B}} |\det(g'(t))| f(g(t)) dt,$$

siempre que la integral del segundo miembro esté bien definida.

Retomando la notación que veníamos utilizando, si  $f$  es una función real continua y  $g$ , definida en  $[0, t]$ , es como en la Proposición 2.2.1, entonces, por la fórmula del área se verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N_{[0,t]}^g(u) du = \int_0^t f(g(s)) |g'(s)| ds. \quad (2.30)$$

Si  $\varphi$  es una densidad de probabilidad y  $\varphi_\delta$  es tal que  $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ , entonces por (2.30) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\delta(u-x) N_{[0,t]}^g(x) dx = \int_0^t \varphi_\delta(u-g(s)) |g'(s)| ds. \quad (2.31)$$

Como  $g$  no presenta puntos críticos en el nivel  $u$ , es sencillo ver que existe un entorno  $[u-\delta, u+\delta]$  en el que  $N_{[0,t]}^g$  es constante (y por lo tanto continua). Pasando al límite en (2.31), resulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \varphi_\delta * N_{[0,t]}^g \right) (u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \varphi_\delta(u-g(s)) |g'(s)| ds$$

de donde se obtiene

$$N_{[0,t]}^g(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \varphi_\delta(u-g(s)) |g'(s)| ds, \quad (2.32)$$

expresión comparable a (2.29).

Incorporemos ahora la aleatoriedad a la discusión. Supongamos que  $\mathcal{X}$  tiene trayectorias diferenciables y que además se verifica que

$$P(\{\omega \in \Omega : \exists s \in [0, t] : X(s, \omega) = u, X'(s, \omega) = 0\}) = 0. \quad (2.33)$$

Como en (2.32), se cumple entonces que casi seguramente

$$N_{[0,t]}^X(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \varphi_\delta(u-X(s)) |X'(s)| ds. \quad (2.34)$$

En lo que sigue, escribiremos simplemente  $N_{[0,t]}(u)$  para hacer referencia al número de cruces a nivel  $u$  de  $\mathcal{X}$ .

### 2.2.2. Expansión de Hermite del número de cruces

Como vimos al comienzo de la sección, la fórmula del contador de Kac deriva en la obtención de la fórmula (2.34) que da una expresión *cerrada* para el número de cruces a nivel  $u$  del proceso en el intervalo  $[0, t]$ . La utilización de las expansiones de Hermite de las funciones en el integrando en la referida expresión, i.e., la aproximación a la *función* delta de Dirac y el valor absoluto de la derivada del proceso, nos proporciona una idea de la heurística para la obtención de un desarrollo en caos de Wiener para el número de cruces. De eso se trata el siguiente resultado de Kratz & León [9].

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $\mathcal{X} = \{X(s)\}_{s \geq 0}$  un proceso gaussiano como se presenta al comienzo del capítulo. Supongamos que además que se verifica*

$$r(0) = -r''(0) = 1 \text{ y } r^{(iv)}(0) < \infty. \quad (2.35)$$

*Si  $t > 0$ , entonces, vale la siguiente expansión en  $L^2(\Omega)$ :*

$$N_{[0,t]}(u) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds, \quad (2.36)$$

donde  $H_k$  es el polinomio de Hermite de grado  $k$ ,

$$b_{q-2l}(u) = \frac{1}{(q-2l)! \sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} H_{q-2l}(u) \quad (2.37)$$

y  $(a_k)_{k \geq 0}$  es la sucesión de coeficientes de Hermite de la función valor absoluto, definida como  $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  y

$$a_{2l} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^{l+1}}{2^l l! (2l-1)}, \quad (2.38)$$

si  $l \geq 1$ .

En [10] se demuestra que como consecuencia de las condiciones (2.35), se verifica que  $\mathbb{E} \left[ (N_{[0,t]}(u))^2 \right] < \infty$ . Observemos que por el Corolario 1.1.28, la condición  $r^{iv}(0) < \infty$  implica que las trayectorias del proceso son de clase  $C^1$ , casi seguramente, en todo intervalo acotado. Antes de pasar a la prueba del teorema, veamos algunos resultados importantes. La prueba del primero de ellos puede encontrarse en [4].

**Teorema 2.2.4 (Ylvisaker).** *Sea  $\mathcal{Z} = \{Z(s)\}_{s \in T}$  un proceso gaussiano real con parámetro en un espacio topológico  $T$ , compacto y separable. Supongamos además que las trayectorias de  $\mathcal{Z}$  son continuas y  $\text{Var}(Z(s)) > 0$ , para todo  $s \in T$ . Entonces, dado  $u \in \mathbb{R}$  fijo, casi seguramente  $\mathcal{Z}$  no tiene puntos críticos en el nivel  $u$ .*

**Lema 2.2.5.** *Sea  $\phi$  la densidad de probabilidad gaussiana estándar. Consideremos la aproximación a la identidad  $\{\phi_\delta\}_{\delta > 0}$ , con  $\phi_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ . Sea*

$$N_{[0,t]}^\delta(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\delta(u-x) N_{[0,t]}(x) dx.$$

Entonces

$$N_{[0,t]}^\delta(u) \rightarrow N_{[0,t]}(u)$$

en  $L^2(\Omega)$ , si  $\delta \rightarrow 0$ .

*Demostración.* De acuerdo a la Observación 1.1.29, las condiciones (2.35) implican (2.33), según el teorema de Ylvisaker. Luego, como caso particular de lo probado en (2.34) se obtiene  $N_{[0,t]}^\delta(u) \rightarrow N_{[0,t]}(u)$ , casi seguramente. Para probar la convergencia en  $L^2(\Omega)$ , alcanza con probar la convergencia de las normas cuadráticas.

Ya mencionamos que  $N_{[0,t]}(u) \in L^2(\Omega)$ . Veamos ahora que para cada  $\delta > 0$ , también  $N_{[0,t]}^\delta(u) \in L^2(\Omega)$ . Observemos primeramente que por la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} N_{[0,t]}^\delta(u)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\delta(u-x) N_{[0,t]}(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\delta(u-x) N_{[0,t]}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\delta(u-x) N_{[0,t]}^2(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\delta(u-x) \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^2(x) \right) dx. \end{aligned}$$

En la sección 10.7 de [13] se demuestra que  $x \mapsto \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^2(x) \right)$  es acotada y continua en  $u$ . Luego, si  $\delta \rightarrow 0$  en la desigualdad anterior, se obtiene  $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right) \leq \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^2(u) \right)$ . Además, por el lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^2(u) \right) &= \mathbb{E} \left( \liminf_{\delta \rightarrow 0} N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right) \\ &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo anterior, resulta  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right) = \mathbb{E} \left( N_{[0,t]}^2(u) \right)$ . Queda así probada la convergencia en  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Lema 2.2.6.** Sea  $f \in L^2(\phi(x)dx)$  y  $(c_q)_{q \geq 0}$  la sucesión de sus coeficientes de Hermite, como en (1.11). Entonces, se tiene en  $L^2(\Omega)$  la expansión

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X(s)) |X'(s)| ds &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_q a_{2l} \int_0^t H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} c_{q-2l} a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde  $\{a_q\}_{q \geq 0}$  es la sucesión de coeficientes de Hermite de la función  $v(x) = |x|$ .

*Demostración.* Comencemos observando que del Lema 2.0.2 se deduce que fijado  $q$ , se verifica que

$$\sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} c_{q-2l} a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds$$

pertenece a  $K_q$ . Sea, para  $Q, L \geq 0$ ,

$$\zeta^{Q,L} = \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^L c_q a_{2l} \int_0^t H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds.$$

Entonces, si  $\tilde{Q} > Q$  y  $\tilde{L} > L$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \zeta^{\tilde{Q}, \tilde{L}} - \zeta^{Q,L} \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \sum_{q=Q+1}^{\tilde{Q}} \sum_{l=L+1}^{\tilde{L}} c_q a_{2l} H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \left( \int_0^t ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t \left( \sum_{q=Q+1}^{\tilde{Q}} \sum_{l=L+1}^{\tilde{L}} c_q a_{2l} H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) \right)^2 ds \right)^{1/2} \right)^2 \right] \\ &= t \mathbb{E} \left[ \int_0^t \sum_{q,q'=Q+1}^{\tilde{Q}} \sum_{l,l'=L+1}^{\tilde{L}} c_q c_{q'} a_{2l} a_{2l'} H_q(X(s)) H_{q'}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) H_{2l'}(X'(s)) ds \right] \\ &= t \int_0^t \sum_{q,q'=Q+1}^{\tilde{Q}} \sum_{l,l'=L+1}^{\tilde{L}} c_q c_{q'} a_{2l} a_{2l'} \underbrace{\mathbb{E} [H_q(X(s)) H_{q'}(X(s))]}_{=\delta_{q,q'} q!} \underbrace{\mathbb{E} [H_{2l}(X'(s)) H_{2l'}(X'(s))]}_{=\delta_{l,l'} (2l)!} ds \\ &= t \int_0^t \sum_{q=Q+1}^{\tilde{Q}} \sum_{l=L+1}^{\tilde{L}} c_q^2 q! a_{2l}^2 (2l)! ds \\ &\leq t^2 \sum_{q \geq Q+1} c_q^2 q! \sum_{l \geq L+1} a_{2l}^2 (2l)!, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la independencia entre  $X(s)$  y  $X'(s)$ , (1.2), y la fórmula de Mehler (1.35). Como las sumas en el último miembro de (2.40) son colas de series convergentes (a los cuadrados de las normas de  $f$  y  $v$  en  $L^2(\phi(x)dx)$  respectivamente), se concluye que la familia  $(\zeta^{Q,L})_{Q,L \geq 0}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . Como consecuencia de lo anterior,

$$\zeta^{Q,L} \rightarrow \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_q a_{2l} \int_0^t H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds$$

en  $L^2(\Omega)$ , si  $Q, L \rightarrow \infty$ .

Observemos ahora que  $f(X(s)) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q H_q(X(s))$  y  $|X'(s)| = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} H_{2l}(X'(s))$ . Siendo estas dos series convergentes en el espacio completo  $L^2(\phi(x)dx)$ , son absolutamente convergentes. Es posible entonces escribir

$$f(X(s))|X'(s)| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_q a_{2l} H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s))$$

y obtener

$$\begin{aligned} & \int_0^t f(X(s))|X'(s)| ds - \zeta^{Q,L} \\ &= \int_0^t \left( \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_q a_{2l} H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) \right) ds - \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^L c_q a_{2l} \int_0^t H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \\ &= \int_0^t \left( \sum_{q=Q+1}^{\infty} \sum_{l=L+1}^{\infty} c_q a_{2l} H_q(X(s)) H_{2l}(X'(s)) \right) ds \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\mathbb{E} \left( \left[ \int_0^t f(X(s))|X'(s)| ds - \zeta^{Q,L} \right]^2 \right) \rightarrow 0$$

con  $Q, L \rightarrow \infty$ .

Para probar la igualdad que involucra el último miembro de (2.39), basta reordenar la suma en términos del orden de los caos y considerar la ortogonalidad. □

Pasamos ahora a la demostración del principal resultado de la presente subsección.

*Demostración.* (del Teorema 2.2.3). Sea  $b_q^\delta(u)$  el  $q$ -ésimo coeficiente de Hermite de la función

$$\phi_\delta(x - u) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\delta^2}}.$$

Es decir,

$$b_q^\delta(u) = \frac{1}{2\pi\delta q!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\delta^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_q(x) dx.$$

Sea

$$\begin{aligned} N_{[0,t]}^\delta(u) &= \int_0^t \phi_\delta(X(s) - u) |X'(s)| ds \\ &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(X(s)-u)^2}{2\delta^2}} |X'(s)| ds. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.2.6 obtenemos para cada  $\delta > 0$ , la siguiente expansión en  $L^2(\Omega)$ :

$$N_{[0,t]}^\delta(u) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds. \quad (2.41)$$

Observando que se verifica

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} b_q^\delta(u) = \frac{1}{q!\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_q(u) = b_q(u) \quad (2.42)$$

vamos a probar ahora que  $N_{[0,t]}^\delta(u)$  converge en  $L^2(\Omega)$ , si  $\delta \rightarrow 0$ , a

$$\mathcal{N}_{[0,t]}(u) := \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds. \quad (2.43)$$

Comencemos demostrando que  $\mathcal{N}_{[0,t]}(u) \in L^2(\Omega)$ . Para cada  $Q \geq 0$ , definimos

$$I_Q = \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds.$$

Veamos que la sucesión  $\{I_Q\}_{Q \geq 0}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . Si  $Q' > Q$ ,

$$\begin{aligned} \|I_{Q'} - I_Q\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\| \sum_{q=Q+1}^{Q'} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{q=Q+1}^{Q'} \left\| \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde se ha utilizado la ortogonalidad del caos. Lo que haremos a continuación es observar que el último miembro en la igualdad anterior tiende a 0 con  $Q$  y  $Q'$ . En efecto, por la ortogonalidad de los caos, por (2.41), el lema de Fatou y el Lema 2.2.5, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=0}^Q \left\| \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{q=0}^Q \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{q=0}^Q \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{q=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \lim_{\delta \rightarrow 0} N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right] \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ N_{[0,t]}^\delta(u)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (N_{[0,t]}(u))^2 \right]. \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta acotación y de (2.44) se tiene,

$$\begin{aligned}
& \lim_{Q, Q' \rightarrow +\infty} \|I_{Q'} - I_Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \lim_{Q, Q' \rightarrow +\infty} \left( \sum_{q=Q+1}^{Q'} \left\| \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por tratarse de la cola de una serie convergente. Queda así probado que  $\mathcal{N}_{[0,t]}(u) \in L^2(\Omega)$ .

Resta demostrar entonces la igualdad en  $L^2(\Omega)$  de  $\mathcal{N}_{[0,t]}(u)$  y  $N_{[0,t]}(u)$ . Observemos que, como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>1</sup>, se obtiene:

$$\mathbb{E} \left[ \left( N_{[0,t]}(u) - \mathcal{N}_{[0,t]}(u) \right)^2 \right] \leq 2 \left( \mathbb{E} \left[ \left( N_{[0,t]}(u) - N_{[0,t]}^\delta(u) \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[ \left( N_{[0,t]}^\delta(u) - \mathcal{N}_{[0,t]}(u) \right)^2 \right] \right). \quad (2.45)$$

Si  $\delta \rightarrow 0$ , el primer sumando en el segundo miembro de (2.45) tiende a cero, por el Lema 2.2.5. Veamos que el segundo sumando también tiende a cero. En primer lugar, también como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>2</sup>, resulta:

$$\begin{aligned}
& \left[ N_{[0,t]}^\delta(u) - \mathcal{N}_{[0,t]}(u) \right]^2 = \left[ \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} (b_{q-2l}^\delta(u) - b_{q-2l}(u)) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right]^2 \\
&= \left[ \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} (b_{q-2l}^\delta(u) - b_{q-2l}(u)) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right. \\
&\quad + \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \\
&\quad \left. - \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right]^2 \\
&\leq 3 \left( \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} (b_{q-2l}^\delta(u) - b_{q-2l}(u)) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \\
&\quad + 3 \left( \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2,
\end{aligned}$$

de donde se deduce por monotonía y por ortogonalidad de los caos,

<sup>1</sup> Observar que  $|\langle (a, 1), (b, 1) \rangle| \leq \|(a, 1)\| \|(b, 1)\| \Leftrightarrow |ab + 1| \leq \sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2}$ , de donde se deduce que  $2ab \leq a^2 + b^2$ . Como consecuencia de lo anterior y de la desigualdad triangular,  $(A - B)^2 \leq (A - C)^2 + (B - C)^2 + 2|A - C||B - C| \leq 2(A - C)^2 + 2(B - C)^2$ .

<sup>2</sup> Razonando igual que antes:  $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \leq 3A^2 + 3B^2 + 3C^2$ .



$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( N_{[0,t]}^\delta(u) - \mathcal{N}_{[0,t]}(u) \right)^2 \right] &\leq 3 \left( \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \right. \\
&\quad + \sum_{q=0}^Q \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} (b_{q-2l}^\delta(u) - b_{q-2l}(u)) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\
&\quad \left. + \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \right). \quad (2.46)
\end{aligned}$$

El primer sumando del segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a 0 con  $Q \rightarrow \infty$ , pues como vimos  $\mathcal{N}_{[0,t]}(u) \in L^2(\Omega)$  y este término es entonces la cola de una serie convergente. El segundo sumando tiende a 0 con  $\delta \rightarrow 0$ , por (2.42). Veamos qué ocurre con el tercero de estos sumandos: con la notación utilizada en (2.2), sea  $\pi_Q$  la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  sobre  $\bigoplus_{q=Q+1}^{\infty} K_q$ . Observemos que se verifica

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=Q+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\
&= \left\| \pi_Q \left( N_{[0,t]}^\delta(u) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

De (2.41) y del Lema 2.0.2 se obtiene que  $N_{[0,t]}^\delta \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ . Por el Lema 2.2.5, por la continuidad de  $\pi_Q$  y por la continuidad de la norma,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \pi_Q \left( N_{[0,t]}^\delta(u) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\| \pi_Q \left( N_{[0,t]}(u) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\lim_{Q \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^\delta(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \right) \\
&= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \left\| \pi_Q \left( N_{[0,t]}(u) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el tercer sumando en el segundo miembro de (2.46) tiende a 0 con  $Q \rightarrow +\infty$  y  $\delta \rightarrow 0$ . Se deduce que el segundo miembro de la desigualdad en (2.45) puede hacerse arbitrariamente pequeño a condición de tomar  $\delta$  suficientemente pequeño y luego  $Q$  suficientemente grande. Con esto se concluye la demostración.  $\square$

## Capítulo 3

# Teorema central del límite para funcionales de ocupación de procesos gaussianos estacionarios

El objetivo principal del presente capítulo es la demostración de un TCL para una versión estandarizada de cada uno de los funcionales de ocupación abordados en el capítulo anterior: el tiempo local y el número de cruces. El procedimiento para conseguirlo, en cada uno de los casos, consiste primeramente en probar, usando los desarrollos en caos de Wiener del capítulo anterior, que la varianza límite es finita. Esto implica que para probar la normalidad asintótica del funcional, alcanza con que lo probemos para las expansiones finitas de los mencionados desarrollos, lo que haremos utilizando el teorema del cuarto momento enunciado en el primer capítulo.

### 3.1. TCL para el tiempo local

Supongamos que  $r \in L^1(\mathbb{R})$  y que se verifican las condiciones (2.1) y (2.4). La presente sección tiene como principal objetivo la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 3.1.1.** *Si*

$$\mathcal{F}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} (L_t(x) - t\phi(x)),$$

*entonces,  $\mathcal{F}_t(x)$  converge en distribución, si  $t \rightarrow \infty$ , a una variable  $Z$ , con  $Z \sim N(0, \sigma^2(x))$ , siendo*

$$0 < \sigma^2(x) = 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^\infty r^q(s) ds.$$

#### 3.1.1. Varianza límite

De lo probado en la Proposición 2.1.4, se obtiene

$$L_t(x) - t\phi(x) = \phi(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds.$$

Luego, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ (L_t(x) - t\phi(x))^2 \right] &= \phi^2(x) \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{q \geq 1} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds \right) \left( \sum_{q' \geq 1} \frac{H_{q'}(x)}{q'!} \int_0^t H_{q'}(X(s)) ds \right) \right] \\
&= \phi^2(x) \sum_{q, q' \geq 1} \frac{H_q(x)}{q!} \frac{H_{q'}(x)}{q'!} \int_0^t \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}(H_q(X(s))H_{q'}(X(s')))}_{=\delta_{q,q'} q! r^q(s-s')} ds ds' \\
&= 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t (t-s) r^q(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

a partir de (1.35). Puede consultarse (5.23) en el Apéndice, donde se realiza este desarrollo para el segundo momento no centrado. Nuestro objetivo inmediato es estudiar el comportamiento de

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ (L_t(x) - t\phi(x))^2 \right] = 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) r^q(s) ds, \tag{3.2}$$

si  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposición 3.1.2.** *Si  $r \in L^1(\mathbb{R})$  y se verifica (2.35), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ (L_t(x) - t\phi(x))^2 \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right] ds < \infty. \tag{3.3}$$

*Demostración.* De acuerdo a (2.21), se tiene que  $\phi^2(x) \sum_{q \geq 0} \frac{H_q^2(x)}{q!} r^q(s) = \phi(x, x, r(s))$ , por lo que

$$\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} r^q(s) = \phi(x, x, r(s)) - \phi^2(x).$$

Pero también,

$$\begin{aligned}
\phi(x, x, r(s)) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2(s)}} e^{-\frac{(2-2r(s))x^2}{2(1-r^2(s))}} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{2\pi \sqrt{1-r^2(s)}}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el desarrollo (3.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) r^q(s) ds &= 2 \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) \phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} r^q(s) ds \\
&= 2 \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) [\phi(x, x, r(s)) - \phi^2(x)] ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right] ds.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Vamos a analizar aspectos relacionados con la convergencia en las igualdades anteriores. En primer lugar, vale el intercambio entre integral y suma en la primera igualdad: en efecto, si  $Q \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \phi^2(x) \sum_{q=1}^Q \frac{H_q^2(x)}{q!} \left(1 - \frac{s}{t}\right) r^q(s) \right| &\leq \phi^2(x) \sum_{q=1}^Q \frac{H_q^2(x)}{q!} \left(1 - \frac{s}{t}\right) |r^q(s)| \\
&\leq \phi^2(x) \sum_{q=1}^Q \frac{H_q^2(x)}{q!} |r(s)|^q \\
&\leq \phi(x, x, |r(s)|),
\end{aligned}$$

por lo que el referido intercambio es válido como consecuencia del teorema de convergencia dominada. Por otra parte, consideremos  $0 < a < t$ , y estudiemos por separado las integrales

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{s}{t}\right) \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right] ds \quad (3.5)$$

y

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_a^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right] ds. \quad (3.6)$$

La condición (2.4) es suficiente para que  $I_1 < \infty$ . Basta realizar adaptaciones menores a lo deducido luego de (2.18).

Estudiemos el comportamiento de  $I_2$ , si  $t \rightarrow \infty$ . Vamos a descomponer la expresión entre paréntesis rectos en (3.6) de la siguiente manera:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} = e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-r^2(s)}} - 1 \right) + \left( e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}} - e^{-x^2} \right). \quad (3.7)$$

Por un lado,

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2(s)}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1-r^2(s)}}{\sqrt{1-r^2(s)}} = \frac{r^2(s)}{\sqrt{1-r^2(s)} (1 + \sqrt{1-r^2(s)})} \sim \frac{1}{2} r^2(s),$$

si  $s \rightarrow \infty$ . Por otro lado,

$$e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}} - e^{-x^2} = e^{-x^2} \left( e^{-x^2 \left( \frac{1}{1+r(s)} - 1 \right)} - 1 \right) = e^{-x^2} \left( e^{\frac{x^2 r(s)}{1+r(s)}} - 1 \right) \sim e^{-x^2} \frac{x^2 r(s)}{1+r(s)},$$

si  $s \rightarrow \infty$ . De acuerdo a lo anterior, por (3.7) se obtiene

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \sim e^{-x^2} \frac{x^2 r(s)}{2},$$

si  $s \rightarrow \infty$ . Luego, retomando (3.6) resulta

$$\left| \left(1 - \frac{s}{t}\right) \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right] \right| \leq \left| \frac{e^{-\frac{x^2}{1+r(s)}}}{\sqrt{1-r^2(s)}} - e^{-x^2} \right| \sim e^{-x^2} x^2 |r(s)|.$$

Como  $r \in L^1(\mathbb{R})$ , se deduce la convergencia de  $I_2$ , si  $t \rightarrow \infty$ . De acuerdo a (3.2), lo obtenido nos alcanza para concluir la demostración.  $\square$

**Observación 3.1.3.** Las manipulaciones realizadas en la demostración de la Proposición 3.1.2 nos permiten obtener una expresión alternativa para la varianza límite, tal como aparece en el enunciado del Teorema 3.1.1:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ (L_t(x) - t\phi(x))^2 \right] = 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^\infty r^q(s) ds. \quad (3.8)$$

Antes de pasar a la demostración del TCL, demostraremos la positividad de la varianza límite.

**Proposición 3.1.4.** *Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se verifica  $\sigma^2(x) > 0$ .*

*Demostración.* Si  $x \in \mathbb{R}$ , de (3.8) se obtiene

$$\sigma^2(x) = 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^{+\infty} r^q(s) ds$$

y puede deducirse además  $\sigma^2(x) \geq 0$ . Si para cada  $q \geq 1$ , definimos

$$S_q(x) = \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^{+\infty} r^q(s) ds,$$

entonces para probar la positividad de  $\sigma^2(x)$ , alcanzará con probar  $S_q(x) > 0$ , para algún  $q \geq 1$ , dado que de (3.8) puede deducirse que la serie anterior tiene sus términos no negativos.

Si  $f$  es la densidad espectral de  $\mathcal{X}$ , que es integrable y no negativa, de (2.1) y mediante una fórmula de inversión, se obtiene

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(s\lambda) r(s) ds$$

y como consecuencia,

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} r(s) ds.$$

Consideremos diferentes casos:

1. Si  $x = 0$ , entonces

$$S_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2(s) ds > 0.$$

2. Si  $x \neq 0$  y  $f(0) \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} S_1(x) &= x^2 \int_0^{+\infty} r(s) ds \\ &= \pi x^2 f(0) \neq 0. \end{aligned}$$

3. Si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , entonces

$$S_2(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{2} \int_0^{+\infty} r^2(s) ds \neq 0,$$

si  $x \neq \pm 1$ . En caso contrario,

$$S_4(\pm 1) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} r^4(s) ds > 0.$$

Esta discusión es suficiente para que quede demostrado que para todo  $x$ , existe  $q$  tal que  $S_q(x) > 0$ . Como mencionáramos antes, esto demuestra que la varianza límite  $\sigma^2(x)$  es positiva, para todo  $x \in \mathbb{R}$ . □

### 3.1.2. Demostración del TCL para el tiempo local

Esta subsección contiene la demostración del Teorema 3.1.1.

Sean

$$\sigma_Q^2(x) = 2\phi^2(x) \sum_{q=1}^Q \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^\infty r^q(s) ds$$

y

$$\mathcal{F}_t^Q(x) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds.$$

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $d_{BL}$  la métrica *bounded Lipschitz*, que metriza la topología de la convergencia en distribución (en el Apéndice se da una breve introducción a esta métrica). Vamos a probar que puede hacerse  $d_{BL}(\mathcal{F}_t(x), N(0, \sigma^2(x))) < \varepsilon$ , a condición de elegir  $t$  suficientemente grande. Por la propiedad triangular,

$$\begin{aligned} d_{BL}(\mathcal{F}_t(x), N(0, \sigma^2(x))) &\leq \underbrace{d_{BL}(\mathcal{F}_t(x), \mathcal{F}_t^Q(x))}_{:=S_1(x,t,Q)} + \underbrace{d_{BL}(\mathcal{F}_t^Q(x), N(0, \sigma_Q^2(x)))}_{:=S_2(x,t,Q)} + \underbrace{d_{BL}(N(0, \sigma_Q^2(x)), N(0, \sigma^2(x)))}_{:=S_3(x,t,Q)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ocupémonos para empezar del tercer sumando en el segundo miembro de la desigualdad anterior. Esencialmente lo que se hace en este paso es probar que  $\lim_{Q \rightarrow +\infty} \sigma_Q^2(x) = \sigma^2(x)$ , lo que es suficiente para la convergencia en distribución relacionada. Si  $0 < a < t$ , entonces

$$\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t r^q(s) ds \right| \leq \underbrace{\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^a r^q(s) ds \right|}_{(I)} + \underbrace{\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_a^t r^q(s) ds \right|}_{(II)}. \quad (3.10)$$

**Convergencia en (II):** Dado que  $\mathcal{X}$  tiene densidad espectral, el Lema de Riemann-Lebesgue implica que fijado  $\rho \in (0, 1)$ , podemos elegir  $a$  de forma tal que  $|r(s)| \leq \rho$ , para todo  $s \in [a, +\infty)$ . Al elegir  $a$  y  $t$  sujetos a lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} &\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_a^t r^q(s) ds \right| \\ &\leq 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_a^t |r(s)|^q ds \\ &= 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_a^t |r(s)|^{Q+1} |r(s)|^{q-(Q+1)} ds \\ &\leq 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \rho^{q-(Q+1)} \int_a^t |r(s)|^{Q+1} ds \\ &= 2\phi^2(x) \sum_{k \geq 0} \frac{H_{k+Q+1}^2(x)}{(k+Q+1)!} \rho^k \int_a^t |r(s)|^{Q+1} ds. \end{aligned}$$

De acuerdo a la Proposición 3 en [7], existe una constante universal  $U$  tal que  $\sup_x \left| \frac{\phi(x)H_l(x)}{\sqrt{l!}} \right| \leq U$ , para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Al retomar las desigualdades anteriores, resulta

$$\begin{aligned}
\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_a^t r^q(s) ds \right| &\leq 2 \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\phi(x) H_{k+Q+1}(x)}{\sqrt{k+Q+1}!} \right)^2 \rho^k \int_a^t |r(s)|^{Q+1} ds \\
&\leq \frac{2U^2 \rho^Q}{1-\rho} \int_a^{+\infty} |r(s)| ds \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

**Convergencia en (I):** En este caso,

$$\begin{aligned}
\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^a r^q(s) ds \right| &\leq 2\phi^2(x) \int_0^a \left| \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} |r(s)|^q \right| ds \\
&= 2 \int_0^a \left| \phi(x, x, |r(s)|) - \sum_{q \leq Q} \frac{H_q^2(x)}{q!} |r(s)|^q \right| ds \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

por convergencia dominada, siendo  $\left| \phi(x, x, |r(s)|) - \sum_{q \leq Q} \frac{H_q^2(x)}{q!} |r(s)|^q \right| \leq 2\phi(x, x, |r(s)|)$ , para todo  $s \in [0, a]$ . Queda así probado que  $\left| 2\phi^2(x) \sum_{q \geq Q+1} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t r^q(s) ds \right| \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0$ , independientemente de  $t$ . Esto alcanza para que podamos elegir  $Q$ , de forma tal que  $S_3(x, t, Q) < \varepsilon/3$ .

En cuanto al primer sumando en el segundo miembro de (3.9), por (5.3) resulta:

$$\begin{aligned}
S_1(x, t, Q) &= \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \mathbb{E} \left[ f(\mathcal{F}_t(x)) - f(\mathcal{F}_t^Q(x)) \right] \right| \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \left| \mathcal{F}_t(x) - \mathcal{F}_t^Q(x) \right| \right] \\
&\leq \left( \mathbb{E} \left[ \left| \mathcal{F}_t(x) - \mathcal{F}_t^Q(x) \right|^2 \right] \right)^{1/2} \\
&= \left( \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \left| \phi(x) \sum_{q=Q+1}^{\infty} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds \right|^2 \right] \right)^{1/2}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Podemos deducir de lo anterior y de la Proposición 3.1.2:  $\lim_{Q \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} S_1(x, t, Q) = 0$ .

Elijamos para lo que sigue  $t$  y  $Q$  de forma que  $S_1(x, t, Q)$  y  $S_3(x, t, Q)$  sean cada uno menor que  $\varepsilon/3$  y pasemos ahora al análisis de la convergencia de  $S_2(x, t, Q)$ . Por simplicidad en la notación, sea

$$J_{q,x,t} = \frac{\phi(x) H_q(x)}{q! \sqrt{t}} \int_0^t H_q(X(s)) ds.$$

Así, podemos escribir

$$\mathcal{F}_t^Q(x) = \sum_{q=1}^Q J_{q,x,t}. \tag{3.12}$$

**Observación 3.1.5.** Esta parte de la demostración utiliza el teorema del cuarto momento de la Sección 1.7 y sus consecuencias. Vale observar que allí la convergencia en distribución se da a través del límite de una sucesión, mientras que aquí nos ocupa un pasaje al límite en tiempo continuo. Por esto, vamos a considerar en lo que resta de la prueba que  $t \in \mathbb{Z}^+$ . Esto puede hacerse sin pérdida de generalidad: en efecto, si  $t > 0$ , entonces se puede escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t^Q(x) &= \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{H_q(x)}{q!} \left( \int_0^{\lfloor t \rfloor} H_q(X(s)) ds + \int_{\lfloor t \rfloor}^t H_q(X(s)) ds \right) \\
&= \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{H_q(x)}{q!} \left( \int_0^{\lfloor t \rfloor} H_q(X(s)) ds + \int_0^{t-\lfloor t \rfloor} H_q(X(s)) ds \right) \\
&= \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}^Q(x) + \mathcal{F}_{t-\lfloor t \rfloor}^Q(x),
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la estacionariedad del proceso. Luego, por (5.3),

$$\begin{aligned}
d_{BL} \left( \mathcal{F}_t^Q(x), \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}^Q(x) \right) &\leq \mathbb{E} \left( \left| \mathcal{F}_t^Q(x) - \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}^Q(x) \right| \right) \\
&\leq \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{|H_q(x)|}{q!} \mathbb{E} \left( \left| \int_0^{t-\lfloor t \rfloor} H_q(X(s)) ds \right| \right) \\
&\leq \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{|H_q(x)|}{q!} \mathbb{E} \left( \int_0^1 |H_q(X(s))| ds \right) \\
&\leq \frac{\phi(x)}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \frac{|H_q(x)|}{q!} \mathbb{E} (|H_q(X(0))|) \\
&:= \frac{C(x)}{\sqrt{t}},
\end{aligned}$$

donde  $C(x)$  es independiente de  $t$ . De la propiedad triangular se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{BL} \left( \mathcal{F}_t^Q(x), N(0, \sigma_Q^2(x)) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d_{BL} \left( \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}^Q(x), N(0, \sigma_Q^2(x)) \right),$$

de donde se deduce que alcanza con considerar  $t \in \mathbb{Z}^+$ .

La notación utilizada en lo que sigue es la correspondiente a integrales múltiples de Wiener-Itô y caos de Wiener, como en la Sección 1.2. Sea  $\mathcal{B} = (B(\lambda))_{\lambda \geq 0}$  un movimiento browniano estándar. Para cada  $q \geq 1$ , vamos a expresar  $J_{q,x,t}$  como una integral múltiple de Wiener Itô respecto a  $\mathcal{B}$ . Para cada  $s \geq 0$ , de acuerdo a la Observación 5.4.6, existe  $h_s \in L^2([0,1])$  tal que  $X(s) = \int_0^1 h_s(\lambda) dB(\lambda) = I_1(h_s)$ . Por la Proposición 1.3.6, tenemos  $H_q(X(s)) = H_q(I_1(h_s)) = I_q(h_s^{\otimes q})$ . Luego, por el Teorema de Fubini estocástico [22], resulta

$$\begin{aligned}
J_{q,x,t} &= \frac{\phi(x)H_q(x)}{q!\sqrt{t}} \int_0^t I_q(h_s^{\otimes q}) ds \\
&= I_q(g_{q,x,t}),
\end{aligned}$$

siendo

$$g_{q,x,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \frac{\phi(x)H_q(x)}{q!\sqrt{t}} \int_0^t h_s^{\otimes q}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) ds,$$

definida en  $[0,1]^q$ . Es sencillo observar que  $g_{q,x,t}$  es una función simétrica.

Para probar la normalidad asintótica de  $J_{q,x,t}$ , si  $t \rightarrow \infty$ , alcanza con probar que para  $k = 1, \dots, q-1$ ,

$$\|g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad (3.13)$$

de acuerdo al Teorema 1.7.1. En este caso, las contracciones resultan



$$\begin{aligned}
& g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t} (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k}) \\
&= \int_{[0,1]^k} g_{q,x,t} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k) g_{q,x,t} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k) dz_1 \cdots dz_k \\
&= \frac{\phi^2(x) H_q^2(x)}{t(q!)^2} \int_{[0,1]^k} \int_0^t \int_0^t h_s^{\otimes q} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k) h_{s'}^{\otimes q} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k) ds ds' dz_1 \cdots dz_k \\
&= \frac{\phi^2(x) H_q^2(x)}{t(q!)^2} \int_0^t \int_0^t \prod_{j=1}^k \left[ \int_0^1 h_s(z_j) h_{s'}(z_j) dz_j \right] h_s^{\otimes q-k} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}) h_{s'}^{\otimes q-k} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}) ds ds' \\
&= \frac{\phi^2(x) H_q^2(x)}{t(q!)^2} \int_0^t \int_0^t r^k(s-s') h_s^{\otimes q-k} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}) h_{s'}^{\otimes q-k} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}) ds ds',
\end{aligned}$$

de acuerdo a la propiedad isométrica de la Observación 5.4.6 y a la Observación 1.1.29. Por simplicidad en la notación, escribiremos  $C_{q,x,t} = \frac{\phi^2(x) H_q^2(x)}{t(q!)^2}$ . A partir de lo desarrollado anteriormente, se obtiene con argumentos similares a los ya utilizados:

$$\begin{aligned}
& \|g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 = \int_{[0,1]^{2q-2k}} |g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t} (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k})|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k} \\
&= C_{q,x,t}^2 \int_{[0,1]^{2q-2k}} \int_{[0,t]^4} r^k(s-s') r^k(u-u') h_s^{\otimes q-k} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}) h_{s'}^{\otimes q-k} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}) \\
&\quad \times h_u^{\otimes q-k} (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}) h_{u'}^{\otimes q-k} (\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}) ds ds' du du' d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k} \\
&= C_{q,x,t}^2 \\
&\quad \times \int_{[0,t]^4} r^k(s-s') r^k(u-u') \int_{[0,1]^{2q-2k}} \prod_{j=1}^{q-k} [h_s(\lambda_j) h_u(\lambda_j) h_{s'}(\lambda_{q-k+j}) h_{u'}(\lambda_{q-k+j})] d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k} ds ds' du du' \\
&= C_{q,x,t}^2 \int_{[0,t]^4} r^k(s-s') r^k(u-u') r^{q-k}(u-s) r^{q-k}(u'-s') ds ds' du du'. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Ahora, mediante el cambio de variables isométrico  $(v_1, v_2, v_3, v_4) \mapsto (s-s', u-u', u-s, u')$  se obtiene

$$\|g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 = \frac{\phi^4(x) H_q^4(x)}{t^2(q!)^4} \iiint\limits_R r^k(v_1) r^k(v_2) r^{q-k}(v_3) r^{q-k}(v_1-v_2+v_3) dv_1 dv_2 dv_3 dv_4,$$

donde  $R$  es una región de  $\mathbb{R}^4$ . Tomando módulo y agrandando el dominio de integración para que resulte rectangular, al aplicar la propiedad triangular resulta

$$\begin{aligned}
\|g_{q,x,t} \otimes_k g_{q,x,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 &\leq \frac{C(q,x)}{t} \iiint\limits_{[0,ct]^3} |r^k(v_1) r^k(v_2) r^{q-k}(v_3)| dv_1 dv_2 dv_3, \\
&\leq \frac{C(q,x)}{t} \left( \int_0^{ct} |r(v)| dv \right)^3, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

donde  $C(q,x)$  es constante dependiente de  $q$  y  $x$ , independiente de  $t$ , que se actualiza en cada uno de los pasos anteriores, y  $c > 0$ . Como  $r \in L^1([0, +\infty))$ , lo obtenido en (3.15) alcanza para probar (3.13).

Solamente resta probar la normalidad asintótica de la suma (3.12). Por el Teorema 1.7.2 queda probado que el vector gaussiano  $(I_1(g_{1,x,t}), \dots, I_Q(g_{Q,x,t}))$  converge en ley a un vector gaussiano  $Q$ -dimensional  $N \sim N(0, \Sigma)$ , con  $\Sigma \in \mathcal{M}_Q(\mathbb{R})$ , diagonal, tal que

$$\begin{aligned}
\Sigma(q,q) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( (I_q(g_{q,x,t}))^2 \right) \\
&= 2\phi^2(x) \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^{+\infty} r^q(s).
\end{aligned}$$

Observemos que  $\sigma_Q^2(x)$  es la traza de  $\Sigma$ . Del Teorema 1.7.2 se deduce la convergencia en distribución de  $\mathcal{F}_t^Q(x)$  a  $N(0, \sigma_Q^2(x))$ , si  $t \rightarrow +\infty$ . Con esto se concluye la prueba.  $\square$

### 3.2. TCL para el número de cruces

En lo que sigue, consideraremos  $u \in \mathbb{R}$  fijo. En esta sección se da una demostración del siguiente resultado:

**Teorema 3.2.1.** *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 2.2.3 y consideremos adicionalmente que*

$$r \in L^1(\mathbb{R}) \quad y \quad r'' \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.16)$$

Sea

$$\mathcal{G}_t := \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ N_{[0,t]}(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} t \phi(u) \right].$$

Entonces

$$\mathcal{G}_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

en distribución, si  $t \rightarrow \infty$ , donde

$$0 < \sigma^2 := \sum_{q \geq 1} \sigma^2(q) < \infty$$

con

$$\sigma^2(q) := 2 \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \sum_{l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \left[ b_{q-2l}(u) b_{q-2l'}(u) a_{2l} a_{2l'} \int_0^\infty \mathbb{E} (H_{q-2l}(X(0)) H_{2l}(X'(0)) H_{q-2l'}(X(s)) H_{2l'}(X'(s))) ds \right] \quad (3.17)$$

Por supuesto que  $\sigma^2$  y  $\sigma^2(q)$  dependen de  $u$ , pero por simplicidad en la notación no escribiremos dicha dependencia.

**Observación 3.2.2.** Cabe destacar que en el Teorema 10.11 de [4] se presenta la demostración de un TCL para un funcional que verifica condiciones comparables a las dadas aquí para el número de cruces en  $[0, t]$  a nivel  $u$ . No obstante, la demostración que aquí presentamos difiere de la que presentan los autores en varios aspectos: 1) las condiciones (3.16) son más débiles que las presentadas en el citado libro<sup>1</sup>; 2) la obtención de la varianza límite  $\sigma^2$  aquí se basa en la utilización de la denominada *desigualdad de Arcones* (Proposición 1.8.2), en contraste con los argumentos predominantemente combinatorios *ad-hoc* utilizados en el citado teorema; 3) la normalidad asintótica de las expansiones finitas del funcional  $\mathcal{G}_t$  se obtiene aquí como consecuencia del teorema del cuarto momento, a diferencia de lo propuesto en [4], donde se recurre a una aproximación por procesos  $\frac{1}{\varepsilon}$ -dependientes<sup>2</sup>.

De (3.16) se obtiene que como  $r$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$  y  $|r|$  es acotada por 1, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)|^2 dt \leq \|r\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty. \quad (3.18)$$

Si usamos la notación  $\hat{\cdot}$  para indicar transformada de Fourier, se tiene:  $\widehat{r'}(\lambda) = i\lambda \widehat{r}(\lambda)$  y  $\widehat{r''}(\lambda) = -\lambda^2 \widehat{r}(\lambda)$ . De la desigualdad  $|\lambda \widehat{r}(\lambda)|^2 \leq (1 + \lambda^2) |\widehat{r}(\lambda)|^2$  se deduce

<sup>1</sup>A saber:  $r, r', r'' \in L^1([0, +\infty))$ .

<sup>2</sup>Ver subsección 10.2.2 de [4].

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\widehat{r'}(\lambda)|^2 d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda \widehat{r}(\lambda)|^2 d\lambda \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda)^2 |\widehat{r}(\lambda)|^2 d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{r}(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |\widehat{r}(\lambda)|^2 d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

El primero de los sumandos anteriores es finito, dado que por (3.18), se verifica  $r \in L^2(\mathbb{R})$  y por el Teorema de Plancherel, también  $\widehat{r} \in L^2(\mathbb{R})$ . El segundo de los sumandos anteriores también es finito como consecuencia del Teorema de Plancherel, dado que el integrando es el módulo de  $\widehat{r'}$  y por hipótesis,  $r'' \in L^2(\mathbb{R})$ . Se obtiene entonces en (3.19) que  $\widehat{r'} \in L^2(\mathbb{R})$ , por lo que usando Plancherel nuevamente,  $r' \in L^2(\mathbb{R})$ . En conclusión las condiciones (3.16) son suficientes para que se obtenga

$$r, r', r'' \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.20}$$

Además, por tener el proceso densidad espectral  $f$  (2.1),  $r$  es la transformada de Fourier de  $f$  y es sencillo verificar además que  $r'$  es la transformada de Fourier de  $i\lambda f(\lambda)$  y  $r''$  lo es de  $-\lambda^2 f(\lambda)$ . La condición (3.16) y el lema de Riemann-Lebesgue implican

$$|r(t)|, |r'(t)|, |r''(t)| \rightarrow 0 \quad , \quad \text{si } |t| \rightarrow \infty, \tag{3.21}$$

lo que será usado posteriormente.

### 3.2.1. Varianza límite

**Proposición 3.2.3.** *En las condiciones del Teorema 3.2.1 se verifica que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\mathcal{G}_t^2) = \sigma^2. \tag{3.22}$$

Además,  $0 < \sigma^2 < \infty$ .

*Demostración.* Sea

$$J_{q,u,t} := \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds.$$

Observemos primeramente que fijado  $t$ , se tiene por ortogonalidad que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{G}_t^2) &= \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{q \geq 1} J_{q,u,t} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{q \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{E}(J_{q,u,t}^2).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Si para cada  $q$  fijo, definimos

$$S_q(s) := \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) \\
&= \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \iint_{[0,t]^2} H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) H_{q-2l'}(X(s')) H_{2l'}(X'(s')) ds ds' \right] \\
&= \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{[0,t]^2} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

El primer paso de la demostración consiste en obtener el límite de  $\frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2)$ , si  $t \rightarrow +\infty$ .

Fijemos  $t_0 > 0$ . A los efectos de obtener una cota superior para (3.24), dividamos  $[0, t]^2$  en dos regiones:

$$\mathcal{R}_1 = \{(s, s') \in [0, t]^2 : |s' - s| \leq t_0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_2 = [0, t]^2 \setminus \mathcal{R}_1.$$

De esta forma, se obtiene

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) = \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_1} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right] + \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_2} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right]. \tag{3.25}$$

Naturalmente, lo anterior, a condición de elegir  $t$  suficientemente grande, lo que no nos condiciona pues el objetivo es considerar  $t \rightarrow +\infty$ . La región  $\mathcal{R}_1$  puede cubrirse por a lo sumo  $\lfloor t/t_0 \rfloor$  cuadrados de lado  $2t_0$ , tal como en la Figura 3.1, en la que se ilustra la situación con  $t = 4$  y  $t_0 = 1$ . Trabajamos primeramente en uno

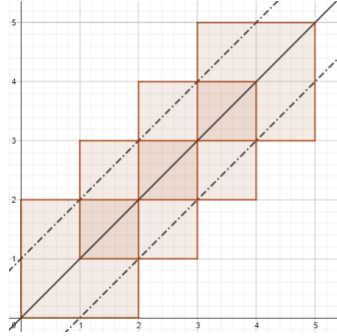


Figura 3.1: Cubrimiento de  $\mathcal{R}_1$

de esos cuadrados. Observemos que por la desigualdad de Jensen y deducciones similares a las utilizadas para obtener (2.40), resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J_{q,u,2t_0}^2) &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^{2t_0} H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \right)^2 \right] \\
&= 4t_0^2 \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{2t_0} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) \frac{ds}{2t_0} \right)^2 \right] \\
&\leq 4t_0^2 \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2t_0} \int_0^{2t_0} \left( \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) \right)^2 ds \right] \\
&= 2t_0 \int_0^{2t_0} \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \mathbb{E} [H_{q-2l}(X(s)) H_{q-2l'}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) H_{2l'}(X'(s))] ds \\
&= 2t_0 \int_0^{2t_0} \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \underbrace{\mathbb{E} [H_{q-2l}(X(s)) H_{q-2l'}(X(s))]}_{=\delta_{l,l'}(q-2l)!} \underbrace{\mathbb{E} [H_{2l}(X'(s)) H_{2l'}(X'(s))]}_{=\delta_{l,l'}(2l)!} ds \\
&= 4t_0^2 \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)!. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Luego, por (3.26) y por la estacionariedad del proceso

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_1} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right] &\leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor t/t_0 \rfloor} \left( \int_{jt_0}^{(j+2)t_0} S_q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{4 \lfloor t/t_0 \rfloor t_0^2}{t} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)! \\
&\leq 4t_0 \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)! \\
&\leq 4t_0 \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) (q-2l)! \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} a_{2l}^2 (2l)!.
\end{aligned}$$

De acuerdo a la Proposición 3 en [7], existe una constante universal  $U$  tal que  $\sup_x \left| \frac{\phi(x) H_k(x)}{\sqrt{k!}} \right| \leq U$ .  
Luego

$$b_{q-2l}^2(u) (q-2l)! = \left( \frac{\phi(u) H_{q-2l}(u)}{(q-2l)!} \right)^2 (q-2l)! \leq U^2,$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_1} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right] \leq C \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} a_{2l}^2 (2l)!, \tag{3.27}$$

siendo  $C$  una constante irrelevante para nuestros propósitos.

Vamos a ocuparnos ahora del segundo sumando en (3.25). De la estacionariedad del proceso y del teorema de Fubini se obtiene

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_2} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right] = 2 \int_{t_0}^t \left( 1 - \frac{v}{t} \right) \mathbb{E} [S_q(0) S_q(v)] dv.$$

Usaremos en este paso la desigualdad de Arcones (Proposición 1.8.2). Sea

$$f(x, y) = \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} H_{q-2l}(x) H_{2l}(y).$$

Claramente  $f \in L^2(\mathbb{R}^2, \phi_2(x)dx)$ , el rango de Hermite de  $f$  es  $\rho(f) = q$  y además,

$$\mathbb{E}[S_q(0)S_q(v)] = \mathbb{E}[f(X(0), X'(0))f(X(v), X'(v))].$$

Consideremos además,

$$\eta_1(v) = |\mathbb{E}(X(0)X(v))| + |\mathbb{E}(X(0)X'(v))| = |r(v)| + |r'(v)|$$

y

$$\eta_2(v) = |\mathbb{E}(X'(0)X(v))| + |\mathbb{E}(X'(0)X'(v))| = |r'(v)| + |r''(v)|.$$

Sea

$$\psi(v) = \sup\{\eta_1(v), \eta_2(v)\}.$$

De (3.21) se deduce que si  $0 < \rho < 1$ , es posible elegir  $t_0$  de forma tal que  $\psi(v) < \rho$ , si  $v > t_0$ . Luego, de acuerdo a (1.53),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_q(0)S_q(v)] &\leq \psi^q(v) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \phi_2(x)dx)} \\ &= \psi^q(v) \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)!. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathcal{R}_2} S_q(s) S_q(s') ds ds' \right] \right| &\leq 2 \int_{t_0}^t \psi^q(v) dv \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)! \\ &\leq 2\rho^{q-2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)!(2l)!. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De (3.27) y (3.28) se obtiene así una acotación para  $\frac{1}{t} \mathbb{E}(J_{q,u,t}^2)$ , que es independiente de  $t$ . Con el mismo cambio de variables  $(s' - s) \rightsquigarrow s$  ya utilizado, por la estacionariedad del proceso, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} \mathbb{E}(J_{q,u,t}^2) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \iint_{[0,t]^2} \mathbb{E}(H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) H_{q-2l'}(X(s')) H_{2l'}(X'(s')))) ds ds' \\ &= 2 \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) \mathbb{E}(H_{q-2l}(X(0)) H_{2l}(X'(0)) H_{q-2l'}(X(s)) H_{2l'}(X'(s))) ds, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}(J_{q,u,t}^2) \\ &= 2 \sum_{l,l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} b_{q-2l'}(u) a_{2l'} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(H_{q-2l}(X(0)) H_{2l}(X'(0)) H_{q-2l'}(X(s)) H_{2l'}(X'(s))) ds \\ &= \sigma^2(q). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Veamos a continuación que se verifica  $\sigma^2 < \infty$ . Las cotas obtenidas en (3.27) y en (3.28) corresponden a términos generales de series convergentes y se tiene:

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) \leq C \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} a_{2l}^2 (2l)! + C' \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}^2(u) a_{2l}^2 (q-2l)! (2l)! \quad (3.30)$$

con  $C, C'$  constantes. Fijado  $\varepsilon > 0$ , como el segundo miembro en la desigualdad anterior es independiente de  $t$  y corresponde al término de una serie en  $q$  convergente, podemos elegir  $Q$  suficientemente grande para que se verifique  $\sup_{t>0} \sum_{q \geq Q+1} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) < \varepsilon$  y entonces

$$\sum_{q \geq Q+1} \sigma^2(q) \leq \sup_{t>0} \sum_{q \geq Q+1} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) < \varepsilon,$$

de donde se deduce,

$$\sigma^2 = \sum_{q \geq 1} \sigma^2(q) < +\infty. \quad (3.31)$$

Veamos que se verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{q \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) = \sigma^2. \quad (3.32)$$

Por la cota uniforme obtenida en (3.30), para cada  $t$  fijo se verifica  $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) < \infty$ . Como de acuerdo a (3.29) se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) = \sigma^2(q)$ , resulta que (3.32) es consecuencia del teorema de convergencia dominada.

Solamente resta demostrar  $\sigma^2 > 0$ , lo que haremos a continuación. Alcanza con probar  $\sigma^2(2) > 0$  (ver que  $\sigma^2(1) = 0$ ). Utilizando la fórmula de Mehler (1.35), las expresiones de los coeficientes (2.37) y (2.38) y las propiedades de la función de covarianza, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma^2(2) &= b_2^2(u) a_0^2 \int_0^{+\infty} r^2(s) ds + 2b_0(u) b_2(u) a_0 a_2 \int_0^{+\infty} (r'(s))^2 ds + b_0^2(u) a_2^2 \int_0^{+\infty} (r''(s))^2 ds \\ &= C_1 e^{-u^2} (u^2 - 1)^2 \int_0^{+\infty} r^2(s) ds + C_2 e^{-u^2} (u^2 - 1) \int_0^{+\infty} (r'(s))^2 ds + C_3 e^{-u^2} \int_0^{+\infty} (r''(s))^2 ds, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  son constantes positivas. Es sencillo observar que el último miembro en (3.33) es positivo, independientemente del valor de  $u$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

### 3.2.2. Demostración del TCL para el número de cruces

El objetivo de esta subsección es la demostración del Teorema 3.2.1. El planteo es, salvo las obvias diferencias producto de que se trata de un funcional distinto, el mismo que el realizado en la demostración del Teorema 3.1.1, incluso en aspectos notacionales, por lo que algunas fundamentaciones serán omitidas.

Como en (3.9), se verifica

$$\begin{aligned} d_{BL}(\mathcal{G}_t, N(0, \sigma^2)) &\leq \underbrace{d_{BL}(\mathcal{G}_t, \mathcal{G}_t^Q)}_{:= S_1(t, Q)} + \underbrace{d_{BL}(\mathcal{G}_t^Q, N(0, \sigma_Q^2))}_{:= S_2(t, Q)} + \underbrace{d_{BL}(N(0, \sigma_Q^2), N(0, \sigma^2))}_{:= S_3(t, Q)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

siendo en este caso

$$\sigma_Q^2 = \sum_{q=1}^Q \sigma^2(q)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t^Q &= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{q=1}^Q \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} \int_0^t H_{q-2l}(X(s)) H_{2l}(X'(s)) ds \\ &= \sum_{q=1}^Q \frac{1}{\sqrt{t}} J_{q,u,t}. \end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Obtengamos primeramente una cota para  $S_3(t, Q)$ :

$$\begin{aligned} |\sigma^2 - \sigma_Q^2| &= \left| \sum_{q \geq Q+1} \sigma^2(q) \right| \\ &\leq \sum_{q \geq Q+1} \left( \frac{Cq}{2^q} + C' \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} a_{2l}^2 (2l)! \right), \end{aligned}$$

como consecuencia de que  $\sigma^2(q) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2)$  y de (3.30). Como el segundo miembro de la desigualdad anterior corresponde a la cola de una serie convergente, se tiene que  $\lim_{Q \rightarrow \infty} |\sigma^2 - \sigma_Q^2| = 0$ . Esta convergencia numérica alcanza para la convergencia en ley de  $N(0, \sigma_Q^2)$  a  $N(0, \sigma^2)$ . Luego, puede encontrarse  $Q$  suficientemente grande para que sea  $S_3(t, Q) < \varepsilon/3$ , uniformemente en  $t$ .

En cuanto a la acotación de  $S_1(t, Q)$ , repitiendo el argumento utilizado en (3.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} S_1(t, Q) &\leq \mathbb{E} \left( \left| \mathcal{G}_t - \mathcal{G}_t^Q \right| \right) \\ &\leq \left( \mathbb{E} \left( \left| \mathcal{G}_t - \mathcal{G}_t^Q \right|^2 \right) \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{t} \mathbb{E} \left( \sum_{q \geq Q+1} J_{q,u,t} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{q \geq Q+1} \frac{1}{t} \mathbb{E} (J_{q,u,t}^2) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, como consecuencia de la acotación obtenida en (3.30) y los comentarios posteriores, se obtiene que  $S_1(t, Q) < \varepsilon/3$ , independientemente de  $t$ , a condición de tomar  $Q$  suficientemente grande.

Vamos a ocuparnos ahora del segundo sumando en (3.34), suponiendo que se ha elegido  $Q$  de forma tal que  $S_1(t, Q) < \varepsilon/3$  y  $S_3(t, Q) < \varepsilon/3$ . Argumentando como en la Observación 3.1.5, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $t \in \mathbb{Z}^+$ . Comenzamos escribiendo  $X(s) = I_1(h_s)$  y  $X'(s) = I_1(h'_s)$ , siendo  $h_s, h'_s \in L^2([0, 1])$ . De esta forma  $H_q(X(s)) = I_q(h_s^{\otimes q})$  y  $H_q(X'(s)) = I_q(h'_s^{\otimes q})$ . Luego,  $\frac{1}{\sqrt{t}} J_{q,u,t} = I_q(g_{q,u,t})$ , siendo

$$g_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} h_s^{\otimes q-2l}(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-2l}) h'_s{}^{\otimes 2l}(\lambda_{q-2l+1}, \dots, \lambda_q) ds.$$

Simbolizaremos con  $\widehat{g}_{q,u,t}$  a la simetrización de  $g_{q,u,t}$ , como en la Definición 1.2.15,



$$\begin{aligned}
\widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} g_{q,u,t}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(q)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}q!} \int_0^t \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} b_{q-2l}(u) a_{2l} h_s^{\otimes q-2l}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(q-2l)}) h_s'^{\otimes 2l}(\lambda_{\sigma(q-2l+1)}, \dots, \lambda_{\sigma(q)}) ds.
\end{aligned}$$

Dada  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ , vamos a utilizar la notación  $\sigma(x_1, \dots, x_q)$  para hacer referencia a  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)})$ . Además, si  $1 \leq i \leq j \leq q$ , la notación  $\sigma_i^j(x_1, \dots, x_q)$  simbolizará al conjunto de entradas en la  $q$ -upla  $\sigma(x_1, \dots, x_q)$  que ocupan las posiciones  $i$  a  $j$ . Es decir,  $\sigma_i^j(x_1, \dots, x_q) := \{x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(j)}\}$ .

Si  $1 \leq k \leq q-1$ , la  $k$ -ésima contracción de  $\widehat{g}_{q,u,t}$  consigo misma es:

$$\begin{aligned}
&\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k}) \\
&= \int_{[0,1]^k} \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k) \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k) dz_1 \cdots dz_k \\
&= \frac{1}{t(q!)^2} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_q} \iint_{[0,1]^2} \sum_{l, l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} c_q^l c_q^{l'} \int_{[0,1]^k} h_s^{\otimes q-2l} \otimes h_s'^{\otimes 2l} [\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k)] \\
&\quad \times h_s^{\otimes q-2l'} \otimes h_s'^{\otimes 2l'} [\sigma'(\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k)] dz_1 \cdots dz_k ds ds', \tag{3.35}
\end{aligned}$$

donde  $c_q^l = b_{q-2l}(u) a_{2l}$  y  $c_q^{l'} = b_{q-2l'}(u) a_{2l'}$ .

Fijemos  $\sigma$  y  $\sigma'$  y observemos que se verifica

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^k} h_s^{\otimes q-2l} \otimes h_s'^{\otimes 2l} [\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k)] h_s^{\otimes q-2l'} \otimes h_s'^{\otimes 2l'} [\sigma'(\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k)] dz_1 \cdots dz_k \\
&= \prod_{j=1}^k \left( \int_0^1 h_s^{\alpha_j(\sigma, l)}(z_j) h_s'^{\bar{\alpha}_j(\sigma, l)}(z_j) h_s^{\alpha_j(\sigma', l')}(z_j) h_s'^{\bar{\alpha}_j(\sigma', l')}(z_j) dz_j \right) \\
&\quad \times h_s^{\otimes q-2l - \sum_{j=1}^k \alpha_j(\sigma, l)} \otimes h_s'^{\otimes 2l - \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_j(\sigma, l)} (\lambda_s \otimes \lambda_s') h_s^{\otimes q-2l' - \sum_{j=1}^k \alpha_j(\sigma', l')} \otimes h_s'^{\otimes 2l' - \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_j(\sigma', l')} (\lambda_{s'} \otimes \lambda_{s'}'), \tag{3.36}
\end{aligned}$$

donde para cada  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ , cada  $l = 0, \dots, \lfloor q/2 \rfloor$  y cada  $j = 1, \dots, k$  se definen

$$\alpha_j(\sigma, l) := \mathbb{1}_{\{\sigma(q-k+j) \leq q-2l\}} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_j(\sigma, l) = \frac{1 + (-1)^{\alpha_j}}{2}.$$

Además, si para cada  $\sigma$  y cada  $l$  como antes se definen

$$\alpha_\sigma^l = q - 2l - \sum_{j=1}^k \alpha_j(\sigma, l) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_\sigma^l = 2l - \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_j(\sigma, l),$$

entonces introducimos la siguiente notación:

- $\lambda_s = \lambda_s(\sigma, l)$  es una  $\alpha_\sigma^l$ -upla de elementos de  $\sigma_1^{q-2l}(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k) \setminus \bigcup_{j=1}^k \{z_j\}$ .
- $\lambda_s' = \lambda_s'(\sigma, l)$  es una  $\bar{\alpha}_\sigma^l$ -upla de elementos de  $\sigma_{q-2l+1}^q(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}, z_1, \dots, z_k) \setminus \bigcup_{j=1}^k \{z_j\}$ .
- $\lambda_{s'} = \lambda_{s'}(\sigma', l')$  es una  $\alpha_{\sigma'}^{l'}$ -upla de elementos de  $\sigma_1^{q-2l'}(\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k) \setminus \bigcup_{j=1}^k \{z_j\}$ ,
- $\lambda_{s'}' = \lambda_{s'}'(\sigma', l')$  es una  $\bar{\alpha}_{\sigma'}^{l'}$ -upla de elementos de  $\sigma_{q-2l'+1}^q(\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}, z_1, \dots, z_k) \setminus \bigcup_{j=1}^k \{z_j\}$ .

De acuerdo a la Observación 1.1.29 y al Corolario 5.4.5,

$$\prod_{j=1}^k \left( \int_0^1 h_s^{\alpha_j(\sigma,l)}(z_j) h'_s{}^{\bar{\alpha}_j(\sigma,l)}(z_j) h_{s'}^{\alpha_j(\sigma',l')}(z_j) h'_{s'}{}^{\bar{\alpha}_j(\sigma',l')}(z_j) dz_j \right) = C \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma,l) + \bar{\alpha}_j(\sigma',l'))}(s - s'), \quad (3.37)$$

donde  $r^{(i)}$  indica la  $i$ -ésima derivada de  $r$ . La constante  $C = \pm 1$  resultará irrelevante en el siguiente paso del desarrollo, cuando consideremos la norma cuadrática de la  $k$ -ésima contracción, es decir,

$$\|\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 = \int_{[0,1]^{2q-2k}} |\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k})|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k}.$$

A partir de (3.36) y (3.37), se obtiene:

$$\begin{aligned} & |\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k})| \\ &= \left| \frac{1}{t(q!)^2} \iint_{[0,t]^2} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_q} \sum_{l, l'=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma,l) + \bar{\alpha}_j(\sigma',l'))}(s - s') c_q^l c_q^{l'} \right. \\ & \quad \times h_s^{\otimes \alpha_\sigma^l} \otimes h'_s{}^{\otimes \bar{\alpha}_\sigma^l}(\lambda_s \otimes \lambda'_s) \\ & \quad \left. \times h_{s'}^{\otimes \alpha_{\sigma'}^{l'}} \otimes h'_{s'}{}^{\otimes \bar{\alpha}_{\sigma'}^{l'}}(\lambda_{s'} \otimes \lambda'_{s'}) ds ds' \right|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Observemos que:

- $\lambda_s \otimes \lambda'_s$  es una permutación de los elementos de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}\}$  dependiente de  $\sigma$  y de  $l$ ,
- $\lambda_{s'} \otimes \lambda'_{s'}$  es una permutación de los elementos de  $\{\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}\}$  dependiente de  $\sigma'$  y de  $l'$ .

Cuando a continuación consideremos el cuadrado de la expresión en (3.38), aparecerán además nuevos índices para sumas,  $l''$  y  $l'''$ , así como sumas sobre  $\sigma'', \sigma''' \in \mathfrak{S}_q$ . También aparecerán variables de integración  $v$  y  $v'$ . Surgirán así  $\lambda_v = \lambda_v(\sigma'', l'')$ ,  $\lambda'_v = \lambda'_v(\sigma'', l'')$ ,  $\lambda_{v'} = \lambda_{v'}(\sigma''', l''')$  y  $\lambda'_{v'} = \lambda'_{v'}(\sigma''', l''')$ , todas definidas de forma coherente con la notación utilizada antes y también,

- $\lambda_v \otimes \lambda'_v$  será una permutación de los elementos de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-k}\}$  dependiente de  $\sigma''$  y de  $l''$ ,
- $\lambda_{v'} \otimes \lambda'_{v'}$  será una permutación de los elementos de  $\{\lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_{2q-2k}\}$  dependiente de  $\sigma'''$  y de  $l'''$ .

Si  $\sum_{\sigma}$  indica suma sobre  $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''' \in \mathfrak{S}_q$ ;  $\mathbf{l} := (l, l', l'', l''')$ , las desigualdades entendidas componente a componente y  $c_q^{\mathbf{l}} := c_q^l c_q^{l'} c_q^{l''} c_q^{l'''}$ , se tiene entonces

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 = \int_{[0,1]^{2q-2k}} |\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2k})|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k} \\
&= \frac{1}{t^2(q!)^4} \int_{[0,1]^{2q-2k}} \sum_{\sigma} \sum_{0 \leq l \leq [q/2]} c_q^l \int_{[0,t]^4} \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma,l) + \bar{\alpha}_j(\sigma',l'))}(s-s') \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma'',l'') + \bar{\alpha}_j(\sigma''',l'''))}(v-v') \\
&\quad \times h_s^{\otimes \alpha_{\sigma}^l} \otimes h_{s'}^{\otimes \bar{\alpha}_{\sigma}^l} (\lambda_s \otimes \lambda_{s'}) h_{s'}^{\otimes \alpha_{\sigma'}^{l'}} \otimes h_{s'}^{\otimes \bar{\alpha}_{\sigma'}^{l'}} (\lambda_{s'} \otimes \lambda_{s'}) \\
&\quad \times h_v^{\otimes \alpha_{\sigma''}^{l''}} \otimes h_v^{\otimes \bar{\alpha}_{\sigma''}^{l''}} (\lambda_v \otimes \lambda_{v'}) h_{v'}^{\otimes \alpha_{\sigma'''}^{l'''}} \otimes h_{v'}^{\otimes \bar{\alpha}_{\sigma'''}^{l'''}} (\lambda_{v'} \otimes \lambda_{v'}) ds ds' dv dv' d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2k} \\
&= \frac{1}{t^2(q!)^4} \sum_{\sigma} \sum_{0 \leq l \leq [q/2]} c_q^l \int_{[0,t]^4} \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma,l) + \bar{\alpha}_j(\sigma',l'))}(s-s') \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma'',l'') + \bar{\alpha}_j(\sigma''',l'''))}(v-v') \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{q-k} \left( \int_0^1 h_s^{\beta_j(\sigma,l,s)} (\lambda_j) h_{s'}^{\bar{\beta}_j(\sigma,l,s)} (\lambda_j) h_v^{\beta_j(\sigma'',l'',v)} (\lambda_j) h_{v'}^{\bar{\beta}_j(\sigma'',l'',v)} (\lambda_j) d\lambda_j \right) \\
&\quad \times \prod_{j=q-k+1}^{2q-2k} \left( \int_0^1 h_{s'}^{\beta_j(\sigma',l',s')} (\lambda_j) h_{s'}^{\bar{\beta}_j(\sigma',l',s')} (\lambda_j) h_{v'}^{\beta_j(\sigma''',l''',v')} (\lambda_j) h_{v'}^{\bar{\beta}_j(\sigma''',l''',v')} (\lambda_j) d\lambda_j \right) ds ds' dv dv',
\end{aligned}$$

donde para cada  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ , cada  $l = 0, \dots, [q/2]$  y cada  $x \in \{s, s', v, v'\}$ , se definen

$$\beta_j(\sigma, l, x) := \mathbb{1}_{\lambda_j \in \langle \lambda_x(\sigma, l) \rangle} \quad \text{y} \quad \bar{\beta}_j(\sigma, l, x) = \frac{1 + (-1)^{\beta_j(\sigma, l, x)}}{2},$$

siendo  $\langle \lambda_x(\sigma, l) \rangle$  el conjunto cuyos elementos son las entradas del vector  $\lambda_x(\sigma, l)$ . Luego, con el mismo argumento mediante el que se obtuvo (3.37), vale expresar

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 \\
&= \frac{1}{t^2(q!)^4} \sum_{\sigma} \sum_{0 \leq l \leq [q/2]} c_q^l \int_{[0,t]^4} \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma,l) + \bar{\alpha}_j(\sigma',l'))}(s-s') \prod_{j=1}^k r^{(\bar{\alpha}_j(\sigma'',l'') + \bar{\alpha}_j(\sigma''',l'''))}(v-v') \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{q-k} r^{(\bar{\beta}_j(\sigma,l,s) + \bar{\beta}_j(\sigma'',l'',v''))}(v-s) \prod_{j=q-k+1}^{2q-2k} r^{(\bar{\beta}_j(\sigma',l',s') + \bar{\beta}_j(\sigma''',l''',v'''))}(v'-s') ds ds' dv dv'. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Como ya se hizo anteriormente, se considera el cambio de variables isométrico  $(w_1, w_2, w_3, w_4) \mapsto (s-s', v-v', v-s, v')$  y el segundo miembro de la desigualdad anterior se puede acotar por

$$\frac{C(q)}{t^2} \iiint_R \left| r^{(i_1)k}(w_1) r^{(i_2)k}(w_2) r^{(i_3)q-k}(w_3) r^{(i_4)q-k}(w_4) (w_1 - w_2 + w_3) \right| dw_1 dw_2 dw_3 dw_4,$$

con  $R \subset \mathbb{R}^4$ ,  $C(q)$  constante dependiente de  $q$  pero independiente de  $t$  y  $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{0, 1, 2\}$ . Con los mismos argumentos utilizados para la obtención de (3.15), se puede concluir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\widehat{g}_{q,u,t} \otimes_k \widehat{g}_{q,u,t}\|_{L^2([0,1]^{2q-2k})}^2 = 0.$$

También repitiendo argumentos utilizados al final de la demostración del TCL para el tiempo local, se obtiene la convergencia en distribución de  $\mathcal{G}_t^Q$  a  $N(0, \sigma_Q^2)$ , si  $t \rightarrow +\infty$ . Queda así concluida esta prueba.  $\square$

## Capítulo 4

# Funcionales de campos gaussianos estacionarios e isotrópicos: hacia una unificación de los artículos [2] y [6].

En este capítulo presentamos una síntesis de un proceso de estudio basado en nuestro interés en las características de ciertos funcionales definidos sobre campos gaussianos estacionarios e isotrópicos. A riesgo de que la siguiente descripción resulte algo vaga, puede decirse que el objetivo es avanzar en una primera aproximación hacia una *unificación* de los artículos [2] y [6], en un sentido que será precisado. A continuación, introduciremos los objetos de estudio que nos ocuparán. En la Observación 4.1.2 se describirá brevemente el vínculo entre los desarrollos aquí presentados y los trabajos mencionados, así como una posible extensión a contextos con hipótesis más débiles.

### 4.1. El funcional $\mathcal{F}(T)$

#### 4.1.1. Presentación del campo $\mathcal{X}$

Sea  $\mathcal{X} = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$  un campo gaussiano a valores reales, centrado, estacionario e isotrópico tal que  $\text{Var}(X(0)) = 1$ . Supongamos además que las trayectorias de  $\mathcal{X}$  son casi seguramente de clase  $C^3(\mathbb{R}^d)$ . Se introducen las siguientes notaciones y convenciones:

- $X_i$  y  $X_{ij}$  son las derivadas de  $X$  de primer y segundo orden, respectivamente.
- $\nabla X(t)$  es el gradiente  $d$ -dimensional:  $(X_1(t), \dots, X_d(t))$ .
- $\nabla^2 X(t)$  es la matriz hessiana  $(m_{ij})$ , de tamaño  $d \times d$ , tal que  $m_{ij} = X_{ij}(t)$ , para todos  $1 \leq i, j \leq d$ . Sin riesgo de ambigüedad, también utilizaremos el símbolo  $\nabla^2 X(t)$  para hacer referencia al vector  $\frac{d(d+1)}{2}$ -dimensional  $(X_{ij}(t))_{1 \leq i \leq j \leq d}$ , conteniendo las entradas de la hessiana sobre y por encima de la diagonal principal.
- $r$  es la función de covarianza de  $X$ . Esto es, para cada  $t \in \mathbb{R}^d$ ,  $r(t) = \text{Cov}(X(0), X(t)) = \mathbb{E}[X(0)X(t)]$ .
- Si  $\mathbf{m} = (i_1, \dots, i_k)$  es un multiíndice con  $1 \leq k \leq 6$  y si  $1 \leq i_j \leq d$ , escribimos

$$\frac{\partial^{\mathbf{m}} r}{\partial t^{\mathbf{m}}}(t) = \frac{\partial^k r}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}}(t) = r_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}(t).$$

La existencia de estas derivadas es consecuencia de que las trayectorias, con probabilidad 1, son de clase  $C^6(\mathbb{R})$ .

Para cada  $t \in \mathbb{R}^d$  se define

$$\psi(t) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{\mathbf{m}} r}{\partial t^{\mathbf{m}}} (t) \right| : \mathbf{m} \in \{1, \dots, d\}^k, 0 \leq k \leq 4 \right\}. \quad (4.1)$$

■ Se define en  $\mathbb{R}^d$  el campo  $\mathbf{X}$ , tal que

$$\mathbf{X}(t) = (\nabla X(t), \nabla^2 X(t), X(t)) \quad (4.2)$$

con valores en  $\mathbb{R}^D$ , siendo  $D = d + \frac{d(d+1)}{2} + 1$ .

■ Simbolizamos con  $\Sigma^{\mathbf{X}}$  a la matriz de covarianza de  $\mathbf{X}$ .

Supongamos adicionalmente que se verifican las siguientes condiciones:

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}^d$ , se verifica

$$\text{rango}(\Sigma^{\mathbf{X}}(t)) = D. \quad (4.3)$$

2. i.

$$\lim_{\|t\| \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0 \quad (4.4)$$

ii.

$$\psi \in L^1(\mathbb{R}^d). \quad (4.5)$$

3. Si  $M \subset \mathbb{R}^d$  es compacto, entonces

$$\mathbb{E} \left[ (N_u(\nabla X, M))^3 \right] < \infty, \quad (4.6)$$

donde para cada  $u \in \mathbb{R}^d$ ,  $N_u(\nabla X, M) = \# \{t \in M : \nabla X(t) = u\}$ .

**Observación 4.1.1.** Las condiciones anteriores son suficientes para que tanto  $\psi$  como  $r$  pertenezcan a  $L^q(\mathbb{R}^d)$ , para todo  $q \geq 1$ . Podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi^q(t) dt = \int_{\|t\| \leq \alpha} \psi^q(t) dt + \int_{\|t\| > \alpha} \psi^q(t) dt,$$

donde  $\alpha$  es tal que  $\psi(t) < 1$ , si  $\|t\| > \alpha$ . Luego, fijado  $q \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\|t\| > \alpha} \psi^q(t) dt &= \int_{\|t\| > \alpha} \psi(t) \psi^{q-1}(t) dt \\ &\leq \int_{\|t\| > \alpha} \psi(t) dt \\ &\leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otra parte, fijemos  $0 \leq k \leq 4$  y  $\mathbf{m} \in \{1, \dots, d\}^k$ . Como las trayectorias de  $\mathcal{X}$  son de clase  $C^3(\mathbb{R}^d)$ ,  $r$  es de clase  $C^6(\mathbb{R}^d)$  y por lo tanto  $\frac{\partial^{\mathbf{m}} r}{\partial t^{\mathbf{m}}}$  tiene máximo en el compacto  $\{\|v\| \leq \alpha\}$ . Sea entonces  $R_{\mathbf{m}} = \max_{\|t\| \leq \alpha} \left| \frac{\partial^{\mathbf{m}} r}{\partial t^{\mathbf{m}}}(t) \right|$ . Si  $R = \max_{\mathbf{m} \in \{1, \dots, d\}^k, 0 \leq k \leq 4} R_{\mathbf{m}}$ , se tiene

$$\int_{\|t\| \leq \alpha} \psi^q(t) dt \leq (2\alpha)^d R^q. \quad (4.8)$$

De (4.7) y (4.8) se obtiene  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ . Es inmediato verificar que  $|r(t)| \leq \psi(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}^d$ , de donde se deduce  $r \in L^q(\mathbb{R}^d)$ .

### 4.1.2. Expansión de Hermite de $\mathcal{F}(T)$

Sean  $N \in \mathbb{Z}^+$  y  $T = [-N, N]^d$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , simbolicemos con  $\delta_\varepsilon$  al núcleo gaussiano  $d$ -dimensional centrado y con matriz de covarianza  $\varepsilon^2 I_d$ , es decir,  $\delta_\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \varepsilon^d} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} x^\top x}$ . Sea además  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que<sup>1</sup>  $g(x) = O(x^n)$ , si  $|x| \rightarrow \infty$ . En lo que sigue, nuestro objeto de estudio será el funcional definido casi seguramente

$$\mathcal{F}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_T \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) \det(\nabla^2(X(t))) g(X(t)) dt. \quad (4.9)$$

Para cada  $\varepsilon > 0$ , sea

$$\mathcal{F}(\varepsilon, T) = \int_T \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) \det(\nabla^2(X(t))) g(X(t)) dt. \quad (4.10)$$

**Observación 4.1.2.** El presente capítulo pretende servir de generalización de los resultados que aparecen en los artículos [2] y [6]. Veamos someramente los principales puntos de los referidos artículos en los que nos basamos para la elaboración de lo que se desarrolla a continuación. Sea un campo  $\mathcal{X}$  con características comparables a las presentadas al comienzo de esta subsección.

1. En [2], para  $m \in \mathbb{N}$  fijo, se define el funcional

$$\Psi_{T_d}[X] = \int_{T_d} X[d\chi],$$

siendo el segundo miembro la denominada *integral de Euler superior* del campo  $\mathcal{X}$  sobre  $T_d := [0, m]^d$ , que se define (para un compacto  $M \subset \mathbb{R}^d$ ) de la siguiente manera

$$\int_M X[d\chi] = \int_0^{+\infty} (\chi(X > u) - \chi(X \leq u)) du, \quad (4.11)$$

donde  $\chi(A)$  indica la característica de Euler del conjunto  $A$ ,  $\chi(X \leq u) := \chi(X^{-1}((-\infty, u]))$  y  $\chi(X > u) := \chi(M) - \chi(X \leq u)$ . En [1] se presenta un detallado análisis de la característica de Euler que proporciona interesantes perspectivas geométricas en el estudio de los campos gaussianos. En [5] se proporciona una interesante motivación para la consideración de integrales respecto a la característica de Euler.

Volviendo a [2], el objetivo es demostrar un TCL para el funcional definido en (4.11), con  $m \rightarrow +\infty$ . Allí aparece

$$F_{T_d}[X] = \sum_{t \in T_d: \nabla X(t)=0} (-1)^{\mu(t)} X(t),$$

donde  $\mu(t)$  es el índice del punto crítico  $t$ , i.e., la cantidad de valores propios negativos de  $\nabla^2 X(t)$ . El funcional  $F_{T_d}[X]$  representa los aportes en el interior de  $T_d$  de  $\psi_{T_d}[X]$ , y se demuestra que éstos resultarán los únicos relevantes para la obtención del mencionado TCL. Un resultado clave indica que  $F_{T_d}[X]$  puede obtenerse como límite en  $L^2(\Omega)$  de

$$F_{T_d}^\varepsilon[X] = \int_{T_d} \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) \det(\nabla^2 X(t)) X(t) dt, \quad (4.12)$$

si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donde  $\delta_\varepsilon$  es como se definiera al comienzo de la subsección. Nótese entonces que esta última expresión (con una conveniente adecuación del dominio de integración) es un caso particular de (4.10).

2. En [6] el objeto de interés es la característica de Euler del *conjunto excursión* de  $\mathcal{X}$ , i.e.,  $A(T, u) = \{t \in T : X(t) \geq u\}$ , donde  $T$  es un cubo de  $\mathbb{R}^d$  y  $u \in \mathbb{R}$ . La simbolizaremos  $\chi(X, T, u)$ . El estudio de la característica de Euler puede considerarse una extensión, en dimensión mayor que 1 de  $U^X(T, u)$ , el número de *up-crossings* a nivel  $u$  de  $X$  en el intervalo  $T$ .

---

<sup>1</sup>Se utiliza aquí la denominada *notación de Landau*.

En el proceso de obtención de un TCL para  $\chi(X, T, u)$ , si  $T$  se expande a  $\mathbb{R}^d$ , aparece el funcional  $\varphi(T)$  a la que se denomina *característica de Euler modificada* de  $A(T, u)$ , que coincide con  $\chi(X, T, u)$  en el interior de  $T$ . La definición de dicho funcional es

$$\varphi(T) = \sum_{k=0}^d (-1)^k \mu_k(T),$$

donde  $\mu_k(T)$  es el número de puntos críticos en  $T$  que están sobre el nivel  $u$  y tales que su índice es  $d - k$ . Un importante resultado en el artículo dice que  $\varphi(T)$  puede obtenerse como límite en  $L^2(\Omega)$  de

$$\varphi(\varepsilon, T) = (-1)^d \int_T \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) \det(\nabla^2 X(t)) \mathbf{1}_{[u, +\infty)}(X(t)) dt, \quad (4.13)$$

si  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Aparece aquí nuevamente un caso particular de (4.10).

De considerar (4.12) y (4.13), surge el interés por estudiar (4.10). Queda abierta la cuestión de si pueden obtenerse resultados similares bajo condiciones más débiles, en particular, siendo  $\mathbb{E} \left[ (N_u(\nabla X, M))^2 \right] < \infty$ , en lugar de (4.6).

**Proposición 4.1.3.** *Si  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  y  $\mathcal{F}(T)$  son como en (4.9) y (4.10), entonces*

1. *Para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{F}(\varepsilon, T) \in L^2(\Omega)$ .*
2.  *$\mathcal{F}(\varepsilon, T) \rightarrow \mathcal{F}(T)$ , en  $L^2(\Omega)$ , si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* Por la fórmula del área (Proposición 2.2.2) se tiene

$$\int_T \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) |\det(\nabla^2 X(t))| dt = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du. \quad (4.14)$$

Sean  $X_{\sup} = \sup_{t \in T} |X(t)|$  y  $g_{\sup} = \sup_{t \in T} |g(X(t))|$ . Fijado  $\varepsilon$ , se tiene por (4.10) y (4.14):

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\varepsilon, T)| &= \left| \int_T \delta_\varepsilon(\nabla X(t)) \det(\nabla^2 X(t)) g(X(t)) dt \right| \\ &\leq g_{\sup} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sea  $r \in [2, 3)$ . Si consideramos  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\mathcal{F}(\varepsilon, T)|^r] &\leq \mathbb{E} \left[ \left( g_{\sup} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du \right)^r \right] \\ &\leq (\mathbb{E} [g_{\sup}^{pr}])^{1/p} \left( \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du \right)^{qr} \right] \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Veamos que ambos factores en el segundo miembro de la desigualdad anterior son acotados, comenzando por el segundo de ellos. Por la desigualdad de Jensen,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du \right)^{qr} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) (N_u(\nabla X, T))^{qr} du.$$

Tomando esperanza, por el teorema de Tonelli, se obtiene

$$\left( \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) N_u(\nabla X, T) du \right)^{qr} \right] \right)^{1/q} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(u) \mathbb{E} [N_u(\nabla X, T)^{qr}] du \right)^{1/q}.$$

Eligiendo  $q = \frac{3}{r} \in (1, 3/2]$ , de la condición (4.6) resulta que es finito el segundo factor en (4.16). Mantengamos esta elección de  $q$  y ocupémonos del primero de los factores en (4.16). Sabemos que existe  $n \geq 1$  tal que

$g(x) \in O(x^n)$ , si  $|x| \rightarrow +\infty$ , por lo que existen constantes  $\kappa, R > 0$  tales que  $|g(x)| \leq \kappa|x|^n$ , para todo  $|x| > R$ . Si  $M = \max_{|x| \leq R} |g(x)|$ , entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \max\{M, \kappa|x|^n\} \\ &\leq M + \kappa|x|^n. \end{aligned}$$

Como  $|x|^n \leq (1 + |x|)^n$  y  $M \leq M(1 + |x|)^n$ , resulta

$$|g(x)| \leq (M + \kappa)(1 + |x|)^n,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego, si  $C := M + \kappa$ , se obtiene

$$\begin{aligned} g_{\sup} &= \sup_{t \in T} |g(X(t))| \\ &\leq C \sup_{t \in T} (1 + |X(t)|)^n \\ &\leq C(1 + X_{\sup})^n, \end{aligned}$$

de donde resulta:

$$g_{\sup}^{pr} \leq C^{pr} (1 + X_{\sup})^{npr}. \quad (4.17)$$

Además,

$$\begin{aligned} (1 + X_{\sup})^{npr} &= \sum_{j=0}^{npr} \binom{npr}{j} X_{\sup}^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{npr} \binom{npr}{j} (1 + X_{\sup}^{npr}) \\ &= 2^{npr} (1 + X_{\sup}^{npr}). \end{aligned}$$

Por esta desigualdad, tomando esperanza en (4.17),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_{\sup}^{pr}] &\leq C^{pr} 2^{npr} \mathbb{E}(1 + X_{\sup}^{npr}) \\ &\leq C' \mathbb{E}(X_{\sup}^{npr}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

siendo  $C'$  una constante irrelevante para nuestros propósitos.

Por comodidad en la notación escribiremos a continuación  $k = npr$ . Sea  $x_0$  tal que  $x_0^{1/k} > \mathbb{E}(X_{\sup})$ . Como  $X_{\sup}$  es no negativa, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\sup}^k] &= \int_0^{+\infty} P(X_{\sup}^k > x) dx \\ &= \int_0^{x_0} P(X_{\sup} > x^{1/k}) dx + \int_{x_0}^{+\infty} P(X_{\sup} > x^{1/k}) dx. \end{aligned}$$

La primera de las integrales anteriores es claramente menor o igual que  $x_0$ . En cuanto a la segunda integral, por la Proposición 1.1.18,

$$\int_{x_0}^{+\infty} P(X_{\sup} > x^{1/k}) dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{(x^{1/k} - \mathbb{E}(X_{\sup}))^2}{2}} dx < \infty.$$

De acuerdo a (4.18), lo anterior es suficiente para acotar el primer miembro en (4.16). Como  $r \geq 2$ , al haber acotado ambos factores en el segundo miembro de la desigualdad en (4.16), queda así probado que para cada



$\varepsilon > 0$ , se verifica que  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  pertenece a  $L^2(\Omega)$ .

Con base en resultados clásicos de Análisis Real, en la Sección 5.3 del Apéndice se justifica que para probar la convergencia en  $L^2(\Omega)$  de  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  a  $\mathcal{F}(T)$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alcanza con observar que existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E} \left[ |\mathcal{F}(\varepsilon, T)|^{2+\gamma} \right] < \infty. \quad (4.19)$$

Esta condición es inmediata si se elige  $\gamma \in (0, 1)$  y  $r = 2 + \gamma$ . Con esto concluye la demostración.  $\square$

Si  $\mathbf{X}$  es como en (4.2), la existencia de las derivadas de primer y segundo orden de  $\mathcal{X}$  garantizan que  $\mathbf{X}$  es un campo gaussiano  $D$ -dimensional. Por la estacionariedad de  $\mathcal{X}$ , la distribución de  $\mathbf{X}$  es independiente de  $t$ . Como consecuencia de la Observación 1.6.7 se tiene la siguiente factorización de  $\Sigma^{\mathbf{X}}$ , la matriz de covarianza de  $\mathbf{X}$ :

$$\Sigma^{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \Sigma^{\nabla X} & 0 \\ 0 & \Sigma^{\nabla^2 X, X} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

donde  $\Sigma^{\nabla X}$  y  $\Sigma^{\nabla^2 X, X}$  son las matrices de covarianza de  $\nabla X$  y  $(\nabla^2 X, X)$ , respectivamente. Si  $t \in \mathbb{R}^d$ , podemos escribir  $\mathbf{X}(t) = \Lambda Y(t)$ , donde  $\Lambda$  es una raíz cuadrada de  $\Sigma^{\mathbf{X}}$  y  $Y(t)$  es un vector gaussiano  $D$ -dimensional, estándar. De (4.20) se obtiene la factorización

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde  $\Lambda_1$  es una matriz cuadrada de tamaño  $d$  y  $\Lambda_2$  es cuadrada de tamaño  $D - d$ . Por la isotropía de  $\mathcal{X}$ , de acuerdo a (1.50), se tiene  $\Lambda_1 = \sqrt{\lambda} I_d$ . Observemos que debe ser  $\lambda > 0$ , dado que si así no fuese, tendríamos que  $\Sigma^{\nabla X}$  sería nula, contra la suposición (4.3). Si se simboliza con  $\Gamma^{\mathbf{X}}$  y  $\Gamma^Y$  a las funciones de covarianza de los campos  $D$ -dimensionales  $\mathbf{X}$  e  $Y$ , respectivamente, resulta para todo  $t \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma^Y(t) &= \mathbb{E} (Y(0)Y(t)^\top) \\ &= \mathbb{E} \left( \Lambda^{-1} \mathbf{X}(0) \mathbf{X}(t)^\top \Lambda^{-1^\top} \right) \\ &= \Lambda^{-1} \Gamma^{\mathbf{X}}(t) \Lambda^{-1^\top}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Vale observar que por la estacionariedad de  $\mathbf{X}$ , se verifica que  $\Lambda$  es independiente de  $t$ .

Consideremos ahora las funciones

- $G_\varepsilon : \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d(d+1)/2} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $G_\varepsilon(x, y, z) = \delta_\varepsilon(x) \det(y) g(z)$  y,
- $f : \mathbb{R}^{D-d} = \mathbb{R}^{d(d+1)/2} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(y, z) = \det(y) g(z)$ .

Si  $w = (\underline{w}, \overline{w}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ , se define además

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\varepsilon(w) &= G_\varepsilon(\Lambda w) \\ &= \delta_\varepsilon(\Lambda_1 \underline{w}) f(\Lambda_2 \overline{w}) \\ &= \delta_\varepsilon \circ \Lambda_1(\underline{w}) f \circ \Lambda_2(\overline{w}). \end{aligned}$$

De esta forma resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varepsilon, T) &= \int_T \tilde{G}_\varepsilon(Y(t)) dt \\ &= \int_T \delta_\varepsilon \circ \Lambda_1(\nabla X(t)) f \circ \Lambda_2(\nabla^2(X(t)), g(X(t))) dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Vamos en busca de una expansión de Hermite para  $\tilde{G}_\varepsilon$ . En primer lugar, se verifica  $\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1 \in L^2(\mathbb{R}^d, \phi_d(\underline{w}) d\underline{w})$ . En efecto,

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon(\Lambda_1(\underline{w})) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \varepsilon^d} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}(\sqrt{\lambda}\underline{w})^\top (\sqrt{\lambda}\underline{w})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \varepsilon^d} e^{-\frac{\lambda}{2\varepsilon^2} \underline{w}^\top \underline{w}},\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}|\delta_\varepsilon(\Lambda_1(\underline{w}))|^2 \phi_d(\underline{w}) &= \frac{1}{(2\pi)^d \varepsilon^{2d}} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon^2} \underline{w}^\top \underline{w}} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2} \underline{w}^\top \underline{w}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3d/2} \varepsilon^{2d}} e^{-\left(\frac{\lambda}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\right) \underline{w}^\top \underline{w}}.\end{aligned}$$

Basta comprobar que  $\left(\frac{\lambda}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\right) > 0$  para concluir  $\int_{\mathbb{R}^d} |\delta_\varepsilon(\Lambda_1(\underline{w}))|^2 \phi_d(\underline{w}) < \infty$ . Por otra parte,  $f \circ \Lambda_2$  es el producto de un polinomio y una función cuadrado integrable respecto a la medida gaussiana estándar. Luego

$$\int_{\mathbb{R}^D} |\tilde{G}_\varepsilon(w)|^2 \phi_D(w) dw = \int_{\mathbb{R}^d} |\delta_\varepsilon(\Lambda_1(\underline{w}))|^2 \phi_d(\underline{w}) d\underline{w} \int_{\mathbb{R}^{D-d}} |f(\Lambda_2 \overline{w})|^2 \phi_{D-d}(\overline{w}) d\overline{w} < \infty.$$

Se obtiene así que  $\tilde{G}_\varepsilon$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^D, \phi_D(w) dw)$ , por lo que de acuerdo a la Proposición 1.2.5 se puede obtener una expansión del tipo

$$\tilde{G}_\varepsilon(y) = \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\tilde{G}_\varepsilon, \mathbf{n}) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(w), \quad (4.23)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D)$  y  $\tilde{H}_{\mathbf{n}}(w) = \prod_{j=1}^D H_{n_j}(w_j)$ . Observemos que para cada  $\mathbf{n}$  se obtiene una factorización del correspondiente coeficiente de Hermite:

$$\begin{aligned}c(\tilde{G}_\varepsilon, \mathbf{n}) &= \frac{1}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^D} \tilde{G}_\varepsilon(w) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(w) \phi_D(w) dw \\ &= \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}! \overline{\mathbf{n}}!} \int_{\mathbb{R}^D} \delta_\varepsilon \circ \Lambda_1(\underline{w}) f \circ \Lambda_2(\overline{w}) \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{w}) \tilde{H}_{\overline{\mathbf{n}}}(\overline{w}) \phi_d(\underline{w}) \phi_{D-d}(\overline{w}) dw \\ &= c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}}),\end{aligned}$$

donde

$$c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}!} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(\sqrt{\lambda}u) \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(u) \phi_d(u) du \quad (4.24)$$

y

$$c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\overline{\mathbf{n}}!} \int_{\mathbb{R}^{D-d}} f(\Lambda_2 v) \tilde{H}_{\overline{\mathbf{n}}}(v) \phi_{D-d}(v) dv. \quad (4.25)$$

De la expresión (4.22) se obtiene la expansión

$$\mathcal{F}(\varepsilon, T) = \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}}) \int_T \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) dt. \quad (4.26)$$

Pasamos a continuación a obtener la expansión de Hermite para  $\mathcal{F}(T)$ . Observemos antes que a partir de la igualdad (4.24) se puede obtener con el cambio de variable  $v = \sqrt{\lambda}u$ ,

$$c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) = \frac{\lambda^{-d/2}}{\underline{\mathbf{n}}!} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(v) \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}\left(\frac{v}{\sqrt{\lambda}}\right) \phi_d\left(\frac{v}{\sqrt{\lambda}}\right) dv,$$

de donde resulta

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) &= \frac{\lambda^{-d/2}}{\underline{\mathbf{n}}!} \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{0}) \phi_d(\underline{0}) \\ &= \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}!} (2\pi\lambda)^{-\frac{d}{2}} \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{0}).\end{aligned}\tag{4.27}$$

Lo anterior vale porque el integrando es continuo en  $\underline{0} \in \mathbb{R}^d$  y  $\delta_\varepsilon$  es una aproximación de la identidad. Lo que se ha obtenido en (4.27) será utilizado en breve para la obtención de la anunciada expansión de  $\mathcal{F}(T)$ .

El siguiente es el resultado central de la presente sección.

**Proposición 4.1.4.** *Sea  $\mathcal{F}(T)$  como en la Proposición 4.1.3. Entonces,  $\mathcal{F}(T)$  admite en  $L^2(\Omega)$  la expansión*

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \int_T \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) dt,$$

donde

$$a(\mathbf{n}) = \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}!} (2\pi\lambda)^{-d/2} \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{0}) c(f \circ \Lambda_2, \bar{\mathbf{n}}).\tag{4.28}$$

*Demostración.* Pasando al límite formalmente en (4.26), usando lo obtenido en (4.27), se puede considerar la expansión

$$\eta(T) = \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \int_T \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) dt.$$

Veamos primeramente que  $\eta(T) \in L^2(\Omega)$ . Sean para cada  $Q \geq 0$ ,

$$\pi^Q(\eta(T)) = \sum_{q=0}^Q \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \int_T \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) dt$$

y

$$\pi_Q(\eta(T)) = \eta(T) - \pi^Q(\eta(T)).$$

Por la ortogonalidad de los caos, por el lema de Fatou, por (4.26) y por la Proposición 4.1.3, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( [\pi^Q(\eta(T))]^2 \right) &= \sum_{q=0}^Q \mathbb{E} \left( \left[ \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \int_T \tilde{H}_n(Y(t)) dt \right]^2 \right) \\
&\leq \sum_{q=0}^Q \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left( \left[ \sum_{\substack{\mathbf{n}=(\underline{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}) \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \bar{\mathbf{n}}) \int_T \tilde{H}_n(Y(t)) dt \right]^2 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left( \sum_{q=0}^Q \left[ \sum_{\substack{\mathbf{n}=(\underline{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}) \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \bar{\mathbf{n}}) \int_T \tilde{H}_n(Y(t)) dt \right]^2 \right) \\
&\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left( \sum_{q \geq 0} \left[ \sum_{\substack{\mathbf{n}=(\underline{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}) \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \bar{\mathbf{n}}) \int_T \tilde{H}_n(Y(t)) dt \right]^2 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left( \left[ \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n}=(\underline{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}) \\ |\mathbf{n}|=q}} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \bar{\mathbf{n}}) \int_T \tilde{H}_n(Y(t)) dt \right]^2 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} (\mathcal{F}(\varepsilon, T)^2) \\
&= \mathbb{E} (\mathcal{F}(T)^2) < \infty.
\end{aligned}$$

Como la cota obtenida es independiente de  $Q$ , se deduce que  $\eta(T) \in L^2(\Omega)$ .

Veamos a continuación que  $\mathcal{F}(T) = \eta(T)$ , en  $L^2(\Omega)$ . Para simplificar la notación,  $\|\cdot\|$  se usará seguidamente para la norma en  $L^2(\Omega)$ . En primer lugar, si  $Q \geq 0$ , se obtiene

$$\|\mathcal{F}(T) - \eta(T)\| \leq \|\pi_Q(\mathcal{F}(T) - \eta(T))\| + \|\pi^Q(\mathcal{F}(T) - \eta(T))\|. \quad (4.29)$$

En cuanto al primero de los sumandos en el segundo miembro de la desigualdad anterior, resulta

$$\|\pi_Q(\mathcal{F}(T) - \eta(T))\| \leq \|\pi_Q(\mathcal{F}(T))\| + \|\pi_Q(\eta(T))\|$$

y como tanto  $\mathcal{F}(T)$  como  $\eta(T)$  pertenecen a  $L^2(\Omega)$ , se tiene que las normas de sus proyecciones  $\pi_Q$  tienden a 0 con  $Q \rightarrow +\infty$ .

En cuanto al segundo de los sumandos en (4.29), si  $Q$  es fijo,

$$\begin{aligned}
\|\pi^Q(\mathcal{F}(T) - \eta(T))\| &\leq \|\pi^Q(\mathcal{F}(T) - \mathcal{F}(\varepsilon, T))\| + \|\pi^Q(\mathcal{F}(\varepsilon, T) - \eta(T))\| \\
&\leq \|\mathcal{F}(T) - \mathcal{F}(\varepsilon, T)\| + \|\pi^Q(\mathcal{F}(\varepsilon, T) - \eta(T))\|.
\end{aligned} \quad (4.30)$$

En (4.30), el primero de los sumandos tiende a cero con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de acuerdo a lo probado en la Proposición 4.1.3. En relación al segundo de los referidos sumandos, fijado  $Q$ , de (4.22), (4.26) y (4.27) se obtiene  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\pi^Q(\mathcal{F}(\varepsilon, T) - \eta(T))\| = 0$ .

De acuerdo a (4.29),  $\|\mathcal{F}(T) - \eta(T)\|$  puede hacerse arbitrariamente pequeño a condición de tomar  $Q$  suficientemente grande, tal como se quería demostrar. □

## 4.2. Teorema central del límite para el funcional $\mathcal{F}(T)$

En la presente sección nos ocuparemos de la demostración de un teorema central del límite para el funcional  $\mathcal{F}(T)$  antes definido. El siguiente es el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\mathcal{X}$  el campo definido al comienzo del capítulo y verificando las propiedades allí enunciadas. Consideremos el funcional*

$$\zeta(T) = \frac{\mathcal{F}(T) - \mathbb{E}(\mathcal{F}(T))}{|T|^{d/2}}, \quad (4.31)$$

donde  $T = [-N, N]^d$  y  $\mathcal{F}(T)$  es como en (4.9). Entonces, existe  $V \in [0, +\infty)$  de forma tal que  $\zeta(T)$  converge en distribución, si  $N \rightarrow +\infty$ , a una variable gaussiana centrada con varianza  $V$ .

Comenzamos demostrando que la varianza asintótica de  $\zeta(T)$  es finita.

### 4.2.1. Varianza límite

**Proposición 4.2.2.** *Sean,  $\mathcal{X}$  el campo definido en la subsección 4.1.1,  $\mathcal{F}(T)$  como en (4.9) y  $\zeta(T)$  definido en (4.31). Entonces, existe  $V \in [0, +\infty)$  tal que*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Var}(\zeta(T)) = V. \quad (4.32)$$

*Demostración.* De acuerdo a la Proposición 4.1.4, se tiene en  $L^2(\Omega)$  la expansión

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}([-N, N]^d) = \sum_{q \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \int_{[-N, N]^d} \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) dt, \quad (4.33)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(\zeta([-N, N]^d)) &= \mathbb{E} \left[ (\zeta([-N, N]^d))^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{(2N)^d} \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=|\mathbf{m}|=q}} a(\mathbf{n})a(\mathbf{m}) \int_{[-N, N]^d} \int_{[-N, N]^d} \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(s)) \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(t)) ds dt \right] \\ &= \frac{1}{(2N)^d} \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=|\mathbf{m}|=q}} a(\mathbf{n})a(\mathbf{m}) \int_{[-N, N]^d} \int_{[-N, N]^d} \mathbb{E} \left[ \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(s)) \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(t)) \right] ds dt, \end{aligned} \quad (4.34)$$

como consecuencia de la ortogonalidad de los caos y del teorema de Fubini. Observamos que mediante el cambio de variables  $(v, w) \mapsto (t - s, t + s)$  se obtiene

$$\begin{aligned} R^N(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &:= \frac{1}{(2N)^d} \int_{[-N, N]^d} \int_{[-N, N]^d} \mathbb{E} \left[ \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(s)) \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(t)) \right] ds dt \\ &= \int_{[-2N, 2N]^d} \mathbb{E} \left[ \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(0)) \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(v)) \right] \prod_{k=1}^d \left( 1 - \frac{|v_k|}{2N} \right) dv. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por (4.34),

$$\text{Var}(\zeta([-N, N]^d)) = \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=|\mathbf{m}|=q}} a(\mathbf{n})a(\mathbf{m}) R^N(\mathbf{n}, \mathbf{m}).$$

El objetivo a continuación será obtener una expresión límite para  $R^N(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ , si  $N \rightarrow +\infty$ , considerando la formulación dada por el segundo miembro en la igualdad (4.35). Fijado  $v \in \mathbb{R}^D$ , por una generalización de la fórmula de Mehler enunciada en la Proposición 1.4.3, si  $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D$  y  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(0)) \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(v)) \right] &= \text{Cov} \left( \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(0)), \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(v)) \right) \\ &= \sum_{\substack{d_{i,j} \geq 0 \\ \sum_i d_{i,j} = n_j; \sum_j d_{i,j} = m_i}} \mathbf{n}! \mathbf{m}! \prod_{1 \leq i,j \leq D} \frac{(\Gamma_{i,j}^Y(v))^{d_{i,j}}}{d_{i,j}!}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

De (4.21) se obtiene

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i,j \leq D} |\Gamma_{i,j}^Y(v)| &\leq \|\Gamma^Y(v)\| \\ &\leq \|\Lambda^{-1}\| \|\Gamma^{\mathbf{X}}(v)\| \|\Lambda^{-1^\top}\| \\ &\leq \|\Lambda^{-1}\|^2 \psi(v) \\ &:= K\psi(v), \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde la norma es la de Frobenius (que es submultiplicativa) y  $\psi$  es como en (4.1). Observemos que  $K = \|\Lambda^{-1}\|^2$  es dependiente de las derivadas de  $r$  en el origen e independiente de  $v$ . Luego, no es difícil verificar que si  $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = q$  y si la sucesión de números naturales  $(d_{i,j})_{i,j}$  cumple  $\sum_i d_{i,j} = n_j$  y  $\sum_j d_{i,j} = m_i$ , resulta

$$\left| \prod_{1 \leq i,j \leq D} \frac{(\Gamma_{i,j}^Y(v))^{d_{i,j}}}{d_{i,j}!} \right| \leq \prod_{1 \leq i,j \leq D} \frac{1}{d_{i,j}!} K^q \psi^q(v),$$

de donde se deduce, retomando (4.36), que si  $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = q$  se tiene

$$\text{Cov} \left( \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(0)), \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(v)) \right) \leq K' \psi^q(v),$$

con  $K' \in \mathbb{R}^+$ . Por la Observación 4.1.1,  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , para todo  $q \geq 1$ , por lo que por convergencia dominada se obtiene

$$R^N(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \rightarrow R(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov} \left( \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(0)), \tilde{H}_{\mathbf{m}}(Y(v)) \right) dv, \quad (4.38)$$

si  $N \rightarrow +\infty$ .

Retomando (4.34), podemos escribir  $\text{Var}(\zeta([-N, N]^d)) = \sum_{q \geq 1} V_q^N$ , siendo

$$V_q^N = \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = q}} a(\mathbf{n}) a(\mathbf{m}) R^N(\mathbf{n}, \mathbf{m}). \quad (4.39)$$

Hemos entonces probado:

$$V_q^N \rightarrow V_q := \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = q}} a(\mathbf{n}) a(\mathbf{m}) R(\mathbf{n}, \mathbf{m}), \quad (4.40)$$

si  $N \rightarrow +\infty$ .

Como para todo  $q \geq 1$  resulta  $V_q^N \geq 0$ , se tiene que  $V_q \geq 0$ .

La obtención de (4.32) será consecuencia del siguiente lema, cuya demostración postergaremos brevemente con el objetivo de que la pesada operatoria involucrada no obstruya la secuencia de razonamientos que se vienen manejando hasta el momento.

**Lema 4.2.3.** Si  $\pi_Q$  es la proyección ortogonal sobre los caos de orden mayor que  $Q$ , entonces se verifica

$$\text{Var} \left( \pi_Q \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) \right) \xrightarrow{Q \rightarrow +\infty} 0, \quad (4.41)$$

uniformemente respecto a  $N$ .

Asumiendo el Lema 4.2.3, dado  $\varepsilon > 0$ , puede encontrarse  $Q$  suficientemente grande, de forma tal que para todo  $N$ , resulte  $\sum_{q=Q+1}^{+\infty} V_q^N < \varepsilon$ . De esto se deduce

$$\sup_N \sum_{q \geq Q+1} V_q^N \rightarrow 0, \quad (4.42)$$

si  $Q \rightarrow +\infty$ . Entonces, como  $\lim_N V_q^N = V_q$ , de acuerdo al lema de Fatou se obtiene

$$\sum_{q \geq Q+1} V_q \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \sum_{q \geq Q+1} V_q^N \xrightarrow{Q \rightarrow +\infty} 0,$$

por (4.42). Esto alcanza para probar que  $\sum_{q \geq 1} V_q$  es convergente y que por lo tanto,

$$\text{Var} \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} V := \sum_{q \geq 1} V_q.$$

□

**Demostración. (del Lema 4.2.3)**

Consideremos el conjunto de índices

$$\mathcal{I}_N = [-N, N)^d \cap \mathbb{Z}^d$$

y observemos que podemos escribir

$$[-N, N)^d = \bigsqcup_{s \in \mathcal{I}_N} ([0, 1)^d + s).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \zeta \left( [-N, N]^d \right) &= \frac{1}{(2N)^{d/2}} \left[ \mathcal{F} \left( [-N, N]^d \right) - \mathbb{E} \left( \mathcal{F} \left( [-N, N]^d \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{(2N)^{d/2}} \sum_{s \in \mathcal{I}_N} \left[ \mathcal{F} \left( [0, 1)^d + s \right) - \mathbb{E} \left( \mathcal{F} \left( [0, 1)^d + s \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{(2N)^{d/2}} \sum_{s \in \mathcal{I}_N} \zeta \left( [0, 1)^d + s \right). \end{aligned}$$

Escribamos ahora

$$V_{N,Q} := \text{Var} \left( \pi_Q \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) \right) = \mathbb{E} \left[ \left[ \pi_Q \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) \right]^2 \right] \quad (4.43)$$

y observemos que por la estacionariedad del campo  $\mathcal{X}$  resulta

$$\begin{aligned} \left[ \pi_Q \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) \right]^2 &= \pi_Q \left( \frac{1}{(2N)^{d/2}} \sum_{s \in \mathcal{I}_N} \zeta \left( [0, 1)^d + s \right) \right) \pi_Q \left( \frac{1}{(2N)^{d/2}} \sum_{s' \in \mathcal{I}_N} \zeta \left( [0, 1)^d + s' \right) \right) \\ &= \frac{1}{(2N)^d} \sum_{s \in \mathcal{I}_N} \sum_{s' \in \mathcal{I}_N} \pi_Q \left( \zeta \left( [0, 1)^d + s \right) \right) \pi_Q \left( \zeta \left( [0, 1)^d + s' \right) \right) \\ &= \frac{1}{(2N)^d} \sum_{s \in \mathcal{I}_N} \sum_{s' \in \mathcal{I}_N} \pi_Q \left( \zeta \left( [0, 1)^d \right) \right) \pi_Q \left( \zeta \left( [0, 1)^d + s' - s \right) \right). \end{aligned}$$

De reorganizar la suma sobre la región  $\mathcal{I}_N \times \mathcal{I}_N$  en función de la diferencia  $\tau := s' - s$ , por (4.43) se obtiene

$$V_{N,Q} = \frac{1}{(2N)^d} \sum_{\tau \in \mathcal{I}_{2N}} \alpha_\tau(N) \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau))] , \quad (4.44)$$

donde  $\alpha_\tau(N) = \#\{t \in \mathcal{I}_N : t - \tau \in \mathcal{I}_N\}$ . El mayor de los cardinales anteriores se da si  $\tau = 0$ , de donde se deduce que  $\alpha_\tau(N) \leq (2N+1)^d$ .

Retomemos la constante  $K$  introducida en (4.37). Por la condición de decaimiento de  $\psi$ , podemos elegir una constante real  $a$  tal que

$$\psi(v) \leq \rho < 1/K, \quad (4.45)$$

si  $\|v\|_\infty \geq a$ , donde  $\rho$  es una constante irrelevante para nuestros propósitos. Separemos la suma (4.44) en dos:

$$V_{N,Q}^1 = \frac{1}{(2N)^d} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty < a+1}} \alpha_\tau(N) \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau))] \quad (4.46)$$

y

$$V_{N,Q}^2 = \frac{1}{(2N)^d} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty \geq a+1}} \alpha_\tau(N) \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau))] . \quad (4.47)$$

Obtengamos a continuación una cota para  $V_{N,Q}^1$ . Supongamos que se verifica  $2N > a+1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |V_{N,Q}^1| &\leq \frac{1}{(2N)^d} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty < a+1}} \alpha_\tau(N) \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d))^2] \\ &\leq \frac{1}{(2N)^d} (2a+2)^d (2N+1)^d \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d))^2] \\ &\leq (3(a+1))^d \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d))^2] , \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la estacionariedad de  $\zeta$ , que el número de sumandos es a lo sumo  $(2a+2)^d$  y que  $\alpha_\tau(N) \leq (2N+1)^d$ . De la Proposición 4.1.4 se deduce  $\lim_{Q \rightarrow +\infty} |V_{N,Q}^1| = 0$ , uniformemente respecto a  $N$ .

Debemos ahora ocuparnos de  $V_{N,Q}^2$ . Con base en el desarrollo (4.33), sea para cada  $q \geq Q+1$  y cada  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$F_q(x) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \tilde{H}_{\mathbf{n}}(x). \quad (4.48)$$

De esta forma,

$$\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau)) = \sum_{q \geq Q+1} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} F_q(Y(t)) F_q(Y(u+\tau)) dt du$$

y la esperanza en (4.47) resulta

$$\mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau))] = \sum_{q \geq Q+1} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} [F_q(Y(t)) F_q(Y(u+\tau))] dt du. \quad (4.49)$$

Para acotar el segundo miembro en la igualdad anterior vamos a utilizar la desigualdad de Arcones (Proposición 1.8.2). Verifiquemos que sus premisas se verifican: Cada  $F_q$  es de cuadrado integrable en  $[0,1]^d$ , su rango de Hermite es  $q$  y  $\mathbb{E} [F_q^2(Y(t))] = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n})^2 \mathbf{n}!$ . Además, de (4.37) y (4.45), luego de verificar que

$\|u + \tau - t\|_\infty \geq a+1$ , se deduce que el supremo de la suma de los módulos de filas y columnas de la matriz de covarianza de  $Y(t)$  y  $Y(u+\tau)$  es menor que 1. Se verifica entonces



$$\mathbb{E} [F_q(Y(t))F_q(Y(u+\tau))] \leq K^q \psi^q(u+\tau-t) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n})^2 \mathbf{n}!. \quad (4.50)$$

Veamos que el segundo miembro en la desigualdad anterior es finito. En la Proposición 4.1.4, para  $\mathbf{n} = (\underline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{n}}) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^{D-d}$ , se definió

$$a(\mathbf{n}) = d(\underline{\mathbf{n}}) c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}}),$$

siendo

$$\begin{aligned} d(\underline{\mathbf{n}}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\delta_\varepsilon \circ \Lambda_1, \underline{\mathbf{n}}) \\ &= \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}!} (2\pi\lambda)^{-\frac{d}{2}} \tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(0). \end{aligned}$$

De acuerdo a la Proposición 3 en [7], existe una constante universal  $C$  tal que  $\sup_x \left| \frac{H_k(x)}{\sqrt{k!}} \phi(x) \right| \leq C$ . Si  $\underline{\mathbf{n}} = (n_1, \dots, n_d)$ , entonces  $\tilde{H}_{\underline{\mathbf{n}}}(0) = \prod_{1 \leq j \leq d} H_{n_j}(0)$ , de donde se deduce

$$\begin{aligned} d(\underline{\mathbf{n}})^2 \underline{\mathbf{n}}! &= \left[ \frac{1}{\underline{\mathbf{n}}!} (2\pi\lambda)^{-\frac{d}{2}} \prod_{1 \leq j \leq d} H_{n_j}(0) \right]^2 \underline{\mathbf{n}}! \\ &= \left[ \lambda^{-\frac{d}{2}} \prod_{1 \leq j \leq d} \frac{H_{n_j}(0)}{\sqrt{n_j!}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \\ &\leq \left( \frac{C^2}{\lambda} \right)^d. \end{aligned}$$

Retomando la suma en (4.50), de la última desigualdad se obtiene  $a(\mathbf{n})^2 \mathbf{n}! \leq \left( \frac{C^2}{\lambda} \right)^d c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}})^2 \overline{\mathbf{n}}!$ , y así resulta

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n})^2 \mathbf{n}! &\leq C^{2d} q^d \sum_{\substack{\overline{\mathbf{n}} \in \mathbb{N}^{D-d} \\ |\overline{\mathbf{n}}| \leq q}} c(f \circ \Lambda_2, \overline{\mathbf{n}})^2 \overline{\mathbf{n}}! \\ &\leq \left( \frac{C^2}{\lambda} \right)^d q^d \|f \circ \Lambda_2\|_{L^2(\mathbb{R}^{D-d}, \phi_{D-d}(y) dy)}^2. \end{aligned}$$

Luego, de (4.49), se obtiene

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} [\pi_Q(\zeta([0,1]^d)) \pi_Q(\zeta([0,1]^d + \tau))] \right| \\ &\leq \left( \frac{C^2}{\lambda} \right)^d \|f \circ \Lambda_2\|^2 \sum_{q \geq Q+1} q^d K^q \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \psi^q(u+\tau-t) du dt \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
|V_{N,Q}^2| &\leq \left(\frac{C^2}{\lambda}\right)^d \|f \circ \Lambda_2\|^2 \sum_{q \geq Q+1} q^d K^q \\
&\quad \times \frac{1}{(2N)^d} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty \geq a+1}} \alpha_\tau(N) \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \psi^q(u-t+\tau) dudt \\
&\leq \left(\frac{3C^2}{2\lambda}\right)^d \|f \circ \Lambda_2\|^2 \sum_{q \geq Q+1} q^d K^q \rho^{q-1} \\
&\quad \times \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty \geq a+1}} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \psi(u-t+\tau) dudt,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado (4.45) y que  $\alpha_\tau(N) \leq (2N+1)^d$ . Analizando el último miembro en la última desigualdad, como  $\rho < 1/K$ , de aplicar algún criterio estándar de clasificación se deduce que  $\sum_{q \geq Q+1} q^d K^q \rho^{q-1}$  es la cola de una serie convergente. Además, luego de aplicar el cambio de variable  $u-t \mapsto v$ , se verifica la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\tau \in \mathcal{I}_{2N} \\ \|\tau\|_\infty \geq a+1}} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \psi(u-t+\tau) dudt \\
&\leq \sum_{\tau \in \mathcal{I}_{2N}} \int_{[-1,1]^d} \psi(v+\tau) dv \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} \psi(v) dv < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo anterior,  $\sup_N |V_{N,Q}^2|$  tiende a 0, si  $Q \rightarrow +\infty$ . Esto completa la demostración del lema.  $\square$

#### 4.2.2. Demostración del TCL para el funcional $\mathcal{F}(T)$

El argumento para completar la demostración del Teorema 4.2.1 es una desigualdad como (3.9). En este caso, si

$$\pi^Q(\zeta([-N, N]^d)) = \frac{1}{(2N)^{d/2}} \int_{[-N, N]^d} \sum_{q=1}^Q F_q(Y(t)) dt, \quad (4.51)$$

con  $F_q$  definida en (4.48) y

$$V^{N,Q} = \sum_{q=1}^Q V_q^N,$$

donde  $V_q^N$  es como en (4.39), resulta

$$\begin{aligned}
&d_{BL}(\zeta([-N, N]^d), N(0, V)) \\
&\leq d_{BL}(\zeta([-N, N]^d), \pi^Q(\zeta([-N, N]^d))) + d_{BL}(\pi^Q(\zeta([-N, N]^d)), N(0, V^{N,Q})) + d_{BL}(N(0, V^{N,Q}), N(0, V)).
\end{aligned} \quad (4.52)$$

Por el Lema 4.2.3, el tercer sumando en el segundo miembro de (4.52) puede hacerse arbitrariamente pequeño a condición de elegir  $Q$  suficientemente grande, para todo  $N$ . El argumento para la acotación del primero de dichos sumandos es el mismo que el utilizado para la obtención de (3.11) y es consecuencia de la Proposición 4.2.2. Veamos a continuación, para  $Q$  fijo, la normalidad asintótica de la sucesión  $(\pi^Q(\zeta([-N, N]^d)))_{N \geq 1}$ . Esta es una adecuación a nuestro contexto del teorema de Breuer-Major.

**Proposición 4.2.4.** Sea  $\mathcal{X}$  un campo gaussiano verificando las condiciones enunciadas al comienzo de la subsección 4.1.1. Para cada  $N, Q \in \mathbb{Z}^+$  sea  $\pi^Q(\zeta([-N, N]^d))$  como en (4.51). Entonces,  $\pi^Q(\zeta([-N, N]^d))$  converge en distribución, si  $N \rightarrow +\infty$ , a una variable gaussiana centrada con varianza finita  $\sum_{q=1}^Q V_q$ , donde cada  $V_q$  es como en (4.40).

*Demostración.* Utilizaremos la notación introducida en la Proposición 2.4 de [6]. Escribamos

$$\pi^Q(\zeta([-N, N]^d)) = \frac{1}{(2N)^{d/2}} \int_{[-N, N]^d} \sum_{q=1}^Q F_q(Y(t)) dt,$$

con  $F_q$  definida en (4.48). Como de acuerdo a la Observación 4.1.1 se cumple que  $r \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\mathcal{X}$  tiene densidad espectral  $f_X$  (Observación 1.5.4) y por lo tanto se tiene la siguiente representación espectral:

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} \sqrt{f_X(\lambda)} dB(\lambda),$$

siendo  $B(\lambda)$  una medida browniana compleja en  $\mathbb{R}^d$ . Observemos que

$$\frac{\partial X}{\partial t_k}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} i\lambda_k e^{i\langle t, \lambda \rangle} \sqrt{f_X(\lambda)} dB(\lambda)$$

y también

$$\frac{\partial X}{\partial t_j \partial t_k}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} -\lambda_j \lambda_k e^{i\langle t, \lambda \rangle} \sqrt{f_X(\lambda)} dB(\lambda).$$

De esta observación resulta que si para cada  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$  se define  $\nu(\lambda) \in \mathbb{C}^D$  como

$$\nu(\lambda) = \left( (i\lambda_j)_{1 \leq j \leq d}; (-\lambda_j \lambda_k)_{1 \leq j \leq k \leq d}; 1 \right),$$

se tiene, para  $t \in \mathbb{R}^d$ , la siguiente representación espectral  $D$ -dimensional:

$$Y(t) = \Lambda^{-1} \mathbf{X}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} \sqrt{f_X(\lambda)} (\Lambda^{-1} \nu(\lambda)) dB(\lambda).$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}^d$  y cada  $j = 1, \dots, D$ , sea  $\mathcal{F}_{t,j} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  tal que

$$Y_j(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_{t,j}(\lambda) dB(\lambda).$$

Como  $Y(t)$  es un vector gaussiano estándar,  $\{\mathcal{F}_{t,1}, \dots, \mathcal{F}_{t,D}\}$  es un conjunto ortonormal en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Luego, si  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D) \in \mathbb{N}^D$  y  $|\mathbf{n}| = q$ , por la Proposición 1.3.6 resulta

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\mathbf{n}}(Y(t)) &= \prod_{1 \leq j \leq D} H_{n_j}(Y_j(t)) \\ &= I_q \left( \mathcal{F}_{t,1}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,D}^{\otimes n_D} \right). \end{aligned}$$

En vista de lo anterior se puede escribir

$$F_q(Y(t)) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) I_q \left( \mathcal{F}_{t,1}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,D}^{\otimes n_D} \right). \quad (4.53)$$

Fijemos  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D) \in \mathbb{N}^D$  con  $|\mathbf{n}| = q$ , y consideremos el conjunto

$$A_{\mathbf{n}} = \left\{ \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_q) \in \{1, \dots, D\}^q : \sum_{j=1}^q \mathbb{1}_{\{i\}}(m_j) = n_i, \forall i = 1, \dots, D \right\}.$$

Cada  $\mathbf{m} \in A_{\mathbf{n}}$  verifica que la cantidad de veces que aparece el valor  $i \in \{1, \dots, D\}$  en  $\mathbf{m}$  coincide con la entrada  $n_i$  de  $\mathbf{n}$ . En otras palabras,  $A_{\mathbf{n}}$  está caracterizado por la condición de que sus elementos son aquellos  $\mathbf{m} \in \{1, \dots, D\}^q$  tales que cada  $n_i$  en el multiíndice  $\mathbf{n}$  cuenta cuántas veces aparece el número  $i$  en las entradas de  $\mathbf{m}$ . Es sencillo ver que la familia  $\{A_{\mathbf{n}}\}_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}}$  es una partición de  $\{1, \dots, D\}^q$ . Además, es inmediato demostrar que para cada  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_q) \in A_{\mathbf{n}}$ , se tiene

$$\left( \widehat{\mathcal{F}_{t,1}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,D}^{\otimes n_D}} \right) = \left( \mathcal{F}_{t,m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,m_q} \right),$$

de donde resulta, por (1.18),

$$I_q \left( \mathcal{F}_{t,1}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,D}^{\otimes n_D} \right) = I_q \left( \mathcal{F}_{t,m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,m_q} \right),$$

para todo  $\mathbf{m} \in A_{\mathbf{n}}$ .

Ahora, para cada  $\mathbf{m} \in A_{\mathbf{n}}$  se define  $b_{\mathbf{m}} = \frac{1}{\#A_{\mathbf{n}}} a(\mathbf{n})$ . El mapa  $\mathbf{m} \mapsto b_{\mathbf{m}}$  es simétrico en  $\{1, \dots, D\}^q$ : esto es consecuencia de que, si  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_q) \in A_{\mathbf{n}}$  y  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ , entonces  $\sigma \mathbf{m} := (m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(q)}) \in A_{\mathbf{n}}$ . De esta forma, se obtiene

$$\begin{aligned} F_q(Y(t)) &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) I_q \left( \mathcal{F}_{t,1}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,D}^{\otimes n_D} \right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D \\ |\mathbf{n}|=q}} a(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{m} \in A_{\mathbf{n}}} I_q \left( \mathcal{F}_{t,m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,m_q} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \{1, \dots, D\}^q} b_{\mathbf{m}} I_q \left( \mathcal{F}_{t,m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,m_q} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Por el teorema de Fubini estocástico se obtiene

$$\pi^Q \left( \zeta \left( [-N, N]^d \right) \right) = \sum_{q=1}^Q I_q \left( g_q^N \right), \quad (4.55)$$

donde  $g_q^N \in L^2(\mathbb{R}^{d^q})$  es la función simétrica dada por

$$g_q^N(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \frac{1}{(2N)^{d/2}} \int_{[-N, N]^d} \sum_{\mathbf{m} \in \{1, \dots, D\}^q} b_{\mathbf{m}} \left( \mathcal{F}_{t,m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{t,m_q} \right) (\lambda_1, \dots, \lambda_q) dt.$$

Por la simetría de  $g_q^N$  es que en lo que sigue resulta más conveniente el desarrollo (4.54) que el (4.53).

Si  $1 \leq r \leq q-1$ , la  $r$ -ésima contracción de  $g_q^N$  consigo misma es

$$\begin{aligned}
& g_q^N \otimes_r g_q^N (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2r}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{dr}} g_q^N (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}, z_1, \dots, z_r) g_q^N (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r}, z_1, \dots, z_r) dz_1 \cdots dz_r \\
&= \frac{1}{(2N)^d} \int_{\mathbb{R}^{dr}} \int_{([-N, N]^d)^2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \{1, \dots, D\}^q} b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} (\mathcal{F}_{t_1, m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_1, m_q}) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}, z_1, \dots, z_r) \\
&\quad \times \left( \mathcal{F}_{t_2, m'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_2, m'_q} \right) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r}, z_1, \dots, z_r) dt_1 dt_2 dz_1 \cdots dz_r \\
&= \frac{1}{(2N)^d} \int_{([-N, N]^d)^2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \{1, \dots, D\}^q} b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} \prod_{j=1}^r \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_{t_1, m_{q-r+j}}(z_j) \mathcal{F}_{t_2, m'_{q-r+j}}(z_j) dz_j \right] \\
&\quad \times (\mathcal{F}_{t_1, m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_1, m_{q-r}}) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}) \left( \mathcal{F}_{t_2, m'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_2, m'_q} \right) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r}) dt_1 dt_2 \\
&= \frac{1}{(2N)^d} \int_{([-N, N]^d)^2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \{1, \dots, D\}^q} b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} \prod_{j=1}^r \Gamma_{m_{q-r+j}, m'_{q-r+j}}^Y(t_2 - t_1) \\
&\quad \times (\mathcal{F}_{t_1, m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_1, m_{q-r}}) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}) \left( \mathcal{F}_{t_2, m'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_2, m'_q} \right) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r}) dt_1 dt_2,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la propiedad isométrica de la MWI y estacionariedad del campo.

Por la desigualdad (4.37),

$$\begin{aligned}
& |g_q^N \otimes_r g_q^N (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2r})| \\
&\leq \frac{K^r}{(2N)^d} \int_{([-N, N]^d)^2} \psi^r(t_2 - t_1) \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \{1, \dots, D\}^q} |b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} (\mathcal{F}_{t_1, m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_1, m_{q-r}}) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}) \\
&\quad \times (\mathcal{F}_{t_2, m'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_2, m'_{q-r}}) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r})| dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& |g_q^N \otimes_r g_q^N (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2r})|^2 \\
&\leq \frac{K^{2r}}{(2N)^{2d}} \int_{([-N, N]^d)^4} \psi^r(t_2 - t_1) \psi^r(t_4 - t_3) \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}', \mathbf{m}'', \mathbf{m}''' \in \{1, \dots, D\}^q} |b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} b_{\mathbf{m}''} b_{\mathbf{m}'''} \\
&\quad \times (\mathcal{F}_{t_1, m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_1, m_{q-r}}) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}) \left( \mathcal{F}_{t_2, m'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_2, m'_{q-r}} \right) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r}) \\
&\quad \times \left( \mathcal{F}_{t_3, m''_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_3, m''_{q-r}} \right) (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-r}) \left( \mathcal{F}_{t_4, m'''_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_4, m'''_{q-r}} \right) (\lambda_{q-r+1}, \dots, \lambda_{2q-2r})| dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo obtenido hasta ahora, con un razonamiento similar y volviendo a usar la estacionariedad, resulta

$$\begin{aligned}
& \|g_q^N \otimes_r g_q^N\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{d2q-2r}} |g_q^N \otimes_r g_q^N (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-2r})|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_{2q-2r} \\
&\leq \frac{K^{2r}}{(2N)^{2d}} \int_{([-N, N]^d)^4} \psi^r(t_2 - t_1) \psi^r(t_4 - t_3) \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}', \mathbf{m}'', \mathbf{m}''' \in \{1, \dots, D\}^q} |b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{m}'} b_{\mathbf{m}''} b_{\mathbf{m}'''} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{q-r} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_{t_1, m_j}(\lambda_j) \mathcal{F}_{t_3, m''_j}(\lambda_j) dz_j \right] \prod_{j=1}^{q-r} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_{t_2, m'_{q-r+j}}(\lambda_{q-r+j}) \mathcal{F}_{t_4, m'''_{q-r+j}}(\lambda_{q-r+j}) dz_j \right] | dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \\
&\leq \frac{K^{2q} D^{4q}}{(2N)^{2d}} \int_{([-N, N]^d)^4} \psi^r(t_2 - t_1) \psi^r(t_4 - t_3) \psi^{q-r}(t_3 - t_1) \psi^{q-r}(t_4 - t_2) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.
\end{aligned}$$

Esta última igualdad es equivalente a las obtenidas en (3.14) y (3.39) y se continúa ahora un procedimiento análogo al que sigue a las mencionadas igualdades, del que se deduce

$$\|g_q^N \otimes_r g_q^N\|^2 \leq \frac{C(K, D)}{(2N)^d} \left( \int_{[-\alpha N, \alpha N]^d} \psi(v) dv \right)^3,$$

donde  $C(K, D)$  es una constante dependiente de  $K$  y de  $D$  e independiente de  $N$  y  $\alpha > 0$ . Como  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , se concluye que  $\lim_N \|g_q^N \otimes_r g_q^N\| = 0$ . Por el Teorema 1.7.1, se verifica que para cada  $q = 1, \dots, Q$ , la sucesión  $I_q(g_q^N)$  converge a una variable gaussiana centrada con varianza  $V_q$ , si  $N \rightarrow +\infty$ . Por la Proposición 1.7.2, el vector  $(I_1(g_1^N), \dots, I_Q(g_Q^N))$  converge a un vector gaussiano centrado con matriz de covarianza  $\Sigma$ , con  $\Sigma_{i,j} = \delta_{i,j}V_i$ . Luego, de (4.55) se deduce la convergencia de  $\pi^Q(\zeta([-N, N]^d))$  a una variable gaussiana centrada con varianza  $\sum_{q=1}^Q V_q$ . Nótese que al utilizar el Teorema 1.7.1 en la argumentación, hemos asumido implícitamente que cada  $V_q$  es positiva. El caso  $V_q = 0$  se encuadra en lo analizado en la Observación 1.7.3. Esto concluye la demostración. □

## Capítulo 5

# Apéndice

### 5.1. Esperanza condicional y martingalas

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y supongamos que  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -subálgebra. Para  $X \in L^1(\Omega)$ , definimos

$$\mu(A) = \int_A X dP$$

para todo  $A \in \mathcal{G}$ . Observemos que  $\mu$  es una medida signada finita absolutamente continua: en efecto, para todo  $A \in \mathcal{G}$ ,

$$|\mu(A)| \leq \int_A |X| dP \leq \int_{\Omega} |X| dP = E|X|$$

y es sencillo verificar que  $\mu(\emptyset) = 0$ , que es  $\sigma$ -aditiva y que si  $P(A) = 0$ , entonces  $\mu(A) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{G}$ . Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una variable aleatoria  $Y$ , que es  $\mathcal{G}$ -medible, con  $\mathbb{E}|Y| < \infty$ , y tal que

$$\mu(A) = \int_A Y dP$$

para todo  $A \in \mathcal{G}$ . Además,  $Y$  es única casi seguramente.

**Definición 5.1.1.** Sean  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  una  $\sigma$ -subálgebra. La *esperanza condicional* de  $X$  dada  $\mathcal{G}$  es cualquier variable  $Y$  que satisfaga las siguientes condiciones:

- i.  $Y$  es  $\mathcal{G}$ -medible;
- ii.  $\int_A X dP = \int_A Y dP$ , para todo  $A \in \mathcal{G}$ .

La notación empleada para la esperanza condicional  $Y$  anterior es  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ . De aquí en más nos referiremos a  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  como *la* esperanza condicional de  $X$  dada  $\mathcal{G}$ .

**Observación 5.1.2.** Si  $X \in L^2(\mathcal{F})$  y  $W$  es la proyección ortogonal de  $X$  sobre  $L^2(\mathcal{G})$ , resulta que  $X - W \perp L^2(\mathcal{G})$ . Es decir que

$$\langle X - W, Z \rangle = \int_{\Omega} (X - W)Z dP = 0$$

para todo  $Z \in L^2(\mathcal{G})$ . Si  $A \in \mathcal{G}$ , entonces  $\mathbf{1}_A \in L^2(\mathcal{G})$  y

$$\int_A (X - W) dP = 0 \iff \int_A X dP = \int_A W dP$$

de donde se obtiene que  $W = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ . En pocas palabras, la esperanza condicional de  $X \in L^2(\mathcal{F})$  dada  $\mathcal{G}$ , es la proyección ortogonal de  $X$  sobre  $L^2(\mathcal{G})$ .

Veamos algunas propiedades destacadas de la esperanza condicional.

**Proposición 5.1.3.** Con la notación utilizada hasta ahora, se verifica:

1.  $\mathbb{E}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}(X)$ .
2. Si  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible, entonces  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ .
3. Si  $X$  y  $\mathcal{G}$  son independientes<sup>1</sup>, entonces  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ .
4. Si  $Y$  es  $\mathcal{G}$ -medible y  $XY \in L^1(\Omega)$ , entonces  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ .
5. Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $X, Y \in L^1(\Omega)$  se verifica que

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

**Observación 5.1.4.** Si  $X, Y \in L^1(\mathcal{F})$  y  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ , la notación utilizada en este caso para la esperanza de  $X$  dada  $\mathcal{G}$  es  $\mathbb{E}(X|Y)$ . De la definición general se obtiene que  $\mathbb{E}(X|Y)$  es la única variable (a menos de conjuntos de medida nula) que verifica que  $\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}(X|Y) dP$ , para todo  $A \in \sigma(Y)$ . En particular,

$$\mathbb{E}(X) = \int \mathbb{E}(X|Y) dP = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)).$$

Si  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas con función de densidad conjunta  $p(x, y)$ , se define

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} \left( x \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \right) dx,$$

si  $p_Y(y) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\}) > 0$  y  $\mathbb{E}(X|Y = y) = 0$ , en caso contrario. Veamos que esta definición es la adecuada en el contexto de las definiciones anteriores. Basta probar que si  $A \in \sigma(Y)$ , entonces  $\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}(X|Y = y) dP$ . De hecho, alcanza con considerar para  $a \in \mathbb{R}$ , conjuntos de la forma  $A = \{Y \leq a\}$ .

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(X|Y = y) dP &= \int_A \left( \int_{\mathbb{R}} \left( x \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \right) dx \right) dP \\ &= \int_{-\infty}^a \left( \int_{\mathbb{R}} \left( x \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \right) dx \right) p_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^a dy \int_{\mathbb{R}} xp(x, y) dx \\ &= \int_A X dP. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si definimos  $F(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$ , entonces  $F$  es  $\sigma(Y)$ -medible y en (5.1) hemos obtenido  $\mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = F(Y)$ . Con los mismos argumentos puede obtenerse  $\mathbb{E}(X|\sigma(Y_1, \dots, Y_n)) = F_n(Y_1, \dots, Y_n)$ , siendo  $Y_1, \dots, Y_n$  absolutamente continuas y  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -medible.

**Definición 5.1.5.** Sea  $T = [0, +\infty)$  o  $T = \mathbb{N}$ . Una *filtración* en  $T$  es una familia creciente  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  de  $\sigma$ -álgebras. Decimos que un proceso estocástico  $(X(t))_{t \in T}$  es *adaptado* a  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , si para cada  $t$ , la variable  $X(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

**Definición 5.1.6.** Decimos que un proceso estocástico  $(X(t))_{t \in T}$  adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  es una *martingala* si se verifican las siguientes condiciones:

1.  $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ , para todo  $t \in T$ .
2. Si  $s, t \in T$  y  $s \leq t$ , entonces

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s), \text{ casi seguramente.}$$

<sup>1</sup>Esta independencia indica que los sucesos  $\{X \leq x\}$  y  $A$  son independientes, para todo  $x \in \mathbb{R}$  y todo  $A \in \mathcal{G}$ .



**Proposición 5.1.7.** *Un movimiento browniano  $(B(t))_{t \in T}$  es una martingala adaptada a  $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta las propiedades de la Proposición 5.1.3, fijado  $t \in T$ , si  $s \leq t$  resulta

$$\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s). \quad (5.2)$$

De acuerdo a las propiedades del movimiento browniano,  $B(t) - B(s)$  es independiente de  $B(s)$  y por lo tanto, es independiente de  $\mathcal{F}_s$ . Luego

$$\mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)) = 0.$$

Por otra parte,

$$\mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s) = B(s)$$

dado que  $B(s)$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible. Volviendo a (5.2), obtenemos que

$$\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = B(s)$$

para todo  $s \leq t$ , con lo que se concluye la prueba. □

## 5.2. Métrica bounded Lipschitz

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función lipschitziana acotada. Se definen la *seminorma de Lipschitz* de  $f$  como

$$\|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

y la *norma bounded Lipschitz* de  $f$  como

$$\|f\|_{BL} = \max\{\|f\|_\infty, \|f\|_L\}.$$

Es inmediato verificar que  $\|\cdot\|_L$  y  $\|\cdot\|_{BL}$  son seminorma y norma, respectivamente. Si  $\mu, \nu$  son medidas de probabilidad en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , se define la *distancia bounded Lipschitz* entre  $\mu$  y  $\nu$  como

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

La distancia  $d_{BL}$  metriza la convergencia débil, i.e., si  $\mu_n, \mu$  son medidas de probabilidad definidas en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , entonces  $\mu_n \Rightarrow \mu$  si y sólo si  $d_{BL}(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ . Detalles acerca de esta equivalencia pueden encontrarse en [20].

Sean  $X_n, X$  variables aleatorias definidas en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y sean  $\mu_n, \mu$ , respectivamente, sus distribuciones. Utilizaremos la notación  $d_{BL}(X_n, X)$  para hacer referencia a  $d_{BL}(\mu_n, \mu)$ . Sabido es que la convergencia en distribución de una sucesión de variables  $(X_n)_n$  a  $X$  es equivalente a la convergencia débil de  $\mu_n$  a  $\mu$ . Se tiene además la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} d_{BL}(X_n, X) &= \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| \\ &= \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} |\mathbb{E}(f(X_n) - f(X))| \\ &\leq \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \|f\|_{BL} \mathbb{E}|X_n - X| \\ &\leq \mathbb{E}|X_n - X|. \end{aligned} \quad (5.3)$$

### 5.3. Integrabilidad uniforme y teorema de convergencia de Vitali

En la demostración de la Proposición 4.1.3 se menciona que condición (4.19)

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E} \left[ |\mathcal{F}(\varepsilon, T)|^{2+\gamma} \right] < \infty$$

es suficiente para demostrar que  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  converge en  $L^2(\Omega)$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  a  $\mathcal{F}(T)$ . El objetivo de esta sección es dar un esquema de la justificación de ese hecho.

**Definición 5.3.1.** Se dice que una sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_n$  es *uniformemente integrable* si

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|X_n| \geq \alpha\}} |X_n| dP = 0.$$

Con un argumento sencillo basado en la desigualdad de Markov, en [12] se demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.2.** Si existe  $\eta > 0$  tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left( |X_n|^{1+\eta} \right) < \infty$ , entonces  $(X_n)_n$  es uniformemente integrable.

Por otra parte, una versión del teorema de convergencia de Vitali (ver, por ejemplo [14]) adecuada al contexto probabilístico es la siguiente.

**Teorema 5.3.3.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $L^2(\Omega)$ . Entonces, esta sucesión es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$  si y solo si se verifican

1.  $(X_n)_n$  es de Cauchy en probabilidad;
2. La sucesión  $\left( |X_n|^2 \right)_n$  es uniformemente integrable.

En el contexto de la Proposición 4.1.3, la condición 1 del teorema anterior se verifica<sup>2</sup>, pues  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  converge casi seguramente a  $\mathcal{F}(T)$ . La segunda condición de Vitali también se verifica: en efecto, si  $X_\varepsilon := |\mathcal{F}(\varepsilon, T)|^2$ , entonces

$$|X_\varepsilon|^{1+\gamma/2} = |\mathcal{F}(\varepsilon, T)|^{2+\gamma}.$$

Luego, de (4.19) se deduce

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E} \left( |X_\varepsilon|^{1+\gamma/2} \right) < \infty.$$

De acuerdo a la Proposición 5.3.2, (con  $\eta = \gamma/2$ ) resulta que la familia  $(X_\varepsilon)_\varepsilon$  es uniformemente integrable. Luego, por el teorema de Vitali,  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$ , es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$  y por lo tanto converge a un límite que no puede ser otro que  $\mathcal{F}(T)$ .

### 5.4. Construcción de la integral múltiple de Wiener-Itô en $[a, b]^q$

Sea  $\mathcal{B} = (B(s))_{s \geq 0}$  un movimiento browniano. Consideremos un intervalo  $[a, b] \subset [0, +\infty)$  y función escalonada de la forma  $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[s_{i-1}, s_i]}$  donde  $a = t_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ . Se define

$$I_1(f) = \sum_{i=1}^n a_i (B(s_i) - B(s_{i-1})). \quad (5.4)$$

<sup>2</sup>Por supuesto, esto a menos de un argumento *de pasaje*, considerando una sucesión  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  y considerando  $\mathcal{F}(\varepsilon_k, T)$ .

Es claro que para cada  $f$  escalonada en  $[a, b]$ ,  $I_1(f)$  es una variable aleatoria definida en  $\Omega$ . Además,  $I_1(\cdot, \omega)$  es un funcional lineal, para cada  $\omega \in \Omega$ . La expresión en el segundo miembro de (5.4) nos da la definición de *integral de Wiener* de una función escalonada.

**Ejemplo 5.4.1.** Consideremos la función  $f \equiv 1$  en  $[0, t]$ . De acuerdo a (5.4), la integral de Wiener de  $f$  es

$$\int_0^t dB(s) = B(t) - B(0) = B(t). \quad (5.5)$$

Cabe recordar que si  $t > 0$ , entonces  $B(t) \sim N(0, t)$ . Este ejemplo evidencia que puede recuperarse cualquier variable gaussiana centrada de forma sencilla usando una integral de Wiener de una función escalonada.

**Proposición 5.4.2.** Si  $f$  es una función escalonada en  $[a, b]$ , entonces  $I_1(f)$  es una variable gaussiana centrada con varianza

$$\mathbb{E} (I_1(f)^2) = \int_a^b f(t)^2 dt \quad (5.6)$$

*Demostración.* Es claro que  $I_1(f)$  es una variable gaussiana centrada, por ser combinación lineal de gaussianas independientes y por las primeras dos condiciones en la Definición 1.2.6. Por otra parte,

$$\mathbb{E} (I_1(f)^2) = \mathbb{E} \left( \sum_{i,j=1}^n a_i a_j (B(s_i) - B(s_{i-1})) (B(s_j) - B(s_{j-1})) \right).$$

De la Definición 1.2.6 se obtiene

$$\mathbb{E} \left[ (B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 \right] = s_i - s_{i-1}$$

y si  $i \neq j$ ,

$$\mathbb{E} ((B(s_i) - B(s_{i-1})) (B(s_j) - B(s_{j-1}))) = 0.$$

Luego,

$$\mathbb{E} (I_1(f)^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 (s_i - s_{i-1}) = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

□

Vamos a ampliar ahora la definición de integral de Wiener para una clase más general de funciones. Consideremos  $f \in L^2([a, b])$  y una sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  de funciones escalonadas en  $[a, b]$  que converge a  $f$  en  $L^2([a, b])$ . Como consecuencia de la Proposición 5.4.2, la sucesión  $(I_1(f_n))_{n \geq 1}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$  y por lo tanto es convergente. Por lo tanto, existe  $I_1(f)$  en  $L^2(\Omega)$  tal que

$$I_1(f) = \lim_n I_1(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (5.7)$$

Para probar que el límite anterior no depende de la elección de la sucesión con la que se aproxima  $f$ , supongamos que  $(g_n)_{n \geq 1}$  es otra sucesión de escalonadas en  $[a, b]$  que converge a  $f$  en  $L^2([a, b])$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|I_1(f_n) - I_1(g_m)|^2) &= \mathbb{E} (|I_1(f_n - g_m)|^2) \\ &= \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2 dt \\ &\leq 2 \int_a^b ((f_n(t) - f(t))^2 + (g_m(t) - f(t))^2) dt \rightarrow 0, \quad \text{si } n, m \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la linealidad del mapa  $I_1$ , la Proposición 5.4.2 y la desigualdad  $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ . Queda así probado que  $\lim_n I_1(f_n) = \lim_m I_1(g_m)$  en  $L^2(\Omega)$ , de donde se deduce que  $I_1(f)$  en (5.7) está bien definido.

**Definición 5.4.3.** Sea  $f \in L^2([a, b])$ . El límite  $I_1(f)$  en (5.7) es llamado *integral de Wiener* de  $f$ .

Una notación usual para la integral de Wiener es  $I_1(f) = \int_a^b f(s) dB(s)$ .

**Proposición 5.4.4.** Para cada  $f \in L^2([a, b])$ , la integral de Wiener  $I_1(f)$  es una variable gaussiana centrada con varianza  $\|f\|_{L^2([a, b])}^2$ .

*Demostración.* De acuerdo a la Proposición 5.4.2, la afirmación es verdadera para funciones escalonadas en  $[a, b]$ . Si  $f \in L^2([a, b])$ , el resultado se deduce del Lema 1.1.5. □

**Corolario 5.4.5.** Si  $f, g \in L^2([a, b])$ , entonces

$$\mathbb{E}(I_1(f)I_1(g)) = \int_a^b f(s)g(s) ds.$$

**Observación 5.4.6.** La linealidad del mapa  $I_1 : L^2([a, b]) \rightarrow L^2(\Omega)$  y los últimos resultados, nos dicen que  $I_1$  es una inmersión isométrica<sup>3</sup>. Simbolicemos con  $K_1$  al conjunto de todas las variables gaussianas centradas definidas en  $\Omega$ , que como sabemos es un espacio de Hilbert gaussiano. Del Ejemplo 5.4.1 se deduce que toda variable gaussiana centrada es imagen por  $I_1$  de una cierta  $f \in L^2([a, b])$ , por lo que restringiendo el codominio se obtiene que el mapa  $I_1 : L^2([a, b]) \rightarrow K_1$  es una isometría.

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [15].

**Proposición 5.4.7.** Sea  $f \in L^2([a, b])$ . Entonces el proceso estocástico  $(M_t)_{t \in [a, b]}$ , con

$$M_t = \int_a^t f(s) dB(s),$$

es una martingala respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}$ .

Pasamos ahora a ocuparnos de las integrales múltiples de Wiener-Itô. Si  $f \in L^2([a, b])$ , la integral de Wiener  $I_1(f) = \int_a^b f(s) dB(s)$  es medible respecto a  $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} := \sigma\{B(s) : s \in [a, b]\}$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}$ , de acuerdo a la Proposición 5.4.7. Si bien, en general,  $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} \subset \mathcal{A}$ , siendo la inclusión estricta, el enfoque que adoptaremos en lo que sigue es darnos el movimiento browniano  $\mathcal{B}$  y considerar que  $\mathcal{A}$  es generada por  $\mathcal{B}$ , es decir,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ .

Se tratará con cierto rigor la construcción de la integral doble y se aceptará que las mismas ideas son aplicables para el caso de integrales de mayor orden. El procedimiento consiste en definir

$$I_2(f) = \int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(t)dB(s), \quad (5.8)$$

donde  $f \in L^2([a, b]^2)$ , lo que (al igual que en el caso de la integral simple) se hace en dos pasos. Sea el conjunto *diagonal* de  $[a, b]^2$  definido como

$$D = \{(t, s) \in [a, b]^2 : s = t\} \quad (5.9)$$

y simbolicemos con  $\mathcal{O}_2$  al conjunto de funciones escalonadas en  $[a, b]^2$  de la forma

$$f = \sum_{i \neq j} a_{i,j} \mathbf{1}_{[s_{i-1}, s_i] \times [s_{j-1}, s_j]}, \quad (5.10)$$

---

<sup>3</sup>Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  y  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  son espacios con producto interno, se dice que el mapa lineal  $T : V \rightarrow W$  es una *inmersión isométrica* si  $\langle f, g \rangle_V = \langle Tf, Tg \rangle_W$ , para todos  $f, g \in V$ . Una *isometría* es una inmersión isométrica sobreyectiva.

donde  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ . Naturalmente, si  $f \in \mathcal{O}_2$ , entonces  $f(D) = \{0\}$  y es sencillo verificar que con las operaciones usuales,  $\mathcal{O}_2$  es un espacio vectorial (un subespacio de  $L^2([a, b]^2)$ , de hecho). Si  $f$  es una función real definida en  $[a, b]^2$ , la *simetrización* de  $f$  es la función  $\widehat{f}$  definida en  $[a, b]^2$  tal que

$$\widehat{f}(t, s) = \frac{1}{2} (f(t, s) + f(s, t))$$

para todo  $(t, s) \in [a, b]^2$ . Veamos algunas propiedades que surgen inmediatamente de la definición:

1. Toda  $f$  verifica que  $\widehat{f}$  es una función simétrica, i.e.,

$$\widehat{f}(t, s) = \widehat{f}(s, t), \text{ para todo par } (t, s)$$

y si  $f$  es simétrica,  $\widehat{f} = f$ .

2. Si  $f, g$  son funciones definidas en  $[a, b]^2$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g},$$

de donde se deduce que el conjunto de las simetrizaciones de funciones definidas en el cuadrado  $[a, b]^2$  es un subespacio vectorial de  $L^2([a, b]^2)$ .

- 3.

Si  $f \in \mathcal{O}_2$ , entonces,  $\widehat{f} \in \mathcal{O}_2$ .

- 4.

$$\|\widehat{f}\|_{L^2([a, b]^2)} \leq \|f\|_{L^2([a, b]^2)}. \quad (5.11)$$

Veamos a continuación el proceso de construcción de la integral doble de Wiener-Itô.

Si  $f \in \mathcal{O}_2$ , se define

$$I_2(f) = \sum_{i \neq j} a_{i,j} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})). \quad (5.12)$$

Igual que antes,  $I_2(f)$  es una variable aleatoria y, si bien la representación de  $f$  puede no ser única, no es difícil verificar que  $I_2(f)$  está bien definido. Además,  $I_2(\alpha f + \beta g) = \alpha I_2(f) + \beta I_2(g)$ , para todas  $f, g \in \mathcal{O}_2$  y todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 5.4.8.** Si  $f \in \mathcal{O}_2$ , entonces  $I_2(f) = I_2(\widehat{f})$ .

*Demostración.* Comencemos suponiendo que  $f$  es la indicatriz de un rectángulo. Sea

$$f = \mathbb{1}_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]} \quad \text{con} \quad [t_1, t_2] \cap [s_1, s_2] = \emptyset.$$

La simetrización de  $f$  es

$$\widehat{f} = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]} + \mathbb{1}_{[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_2(\widehat{f}) &= \frac{1}{2} [(B(t_1) - B(t_2))(B(s_2) - B(s_1)) + (B(s_2) - B(s_1))(B(t_2) - B(t_1))] \\ &= (B(t_2) - B(t_1))(B(s_2) - B(s_1)) \\ &= I_2(f). \end{aligned}$$

Para la prueba del caso general se utiliza la linealidad de los operadores  $I_2$  y de simetrización. □

**Proposición 5.4.9.** Si  $f \in \mathcal{O}_2$ , entonces  $\mathbb{E}(I_2(f)) = 0$  y

$$\|I_2(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \|\hat{f}\|_{L^2([a,b]^2)}^2. \quad (5.13)$$

*Demostración.* Sea  $f$  como en (5.10). La primera afirmación es una consecuencia sencilla de la definición de  $f$  y de las propiedades del movimiento browniano. Vamos a probar la propiedad relativa a la varianza.

Consideremos inicialmente que  $f$  es simétrica, lo que implica que  $a_{i,j} = a_{j,i}$ , si  $i \neq j$ . Por comodidad en la notación, sea  $X_i = B(s_i) - B(s_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Observemos que por las propiedades del movimiento browniano  $X_i \sim N(0, s_i - s_{i-1})$  y  $X_1, \dots, X_n$  son independientes, por lo que tienen distribución conjunta gaussiana. Si se define  $I_2(f)$  como en (5.12), por la condición de simetría resulta

$$I_2(f) = 2 \sum_{i < j} a_{i,j} X_i X_j.$$

Luego,

$$\|I_2(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbb{E}(I_2(f)^2) = 4 \sum_{i < j} \sum_{p < q} a_{i,j} a_{p,q} \mathbb{E}(X_i X_j X_p X_q). \quad (5.14)$$

Fijemos  $i < j$ . Dada la referida gaussianidad conjunta de las variables involucradas, por el Teorema de Wick (ver, por ejemplo [8]), se tiene

$$\mathbb{E}(X_i X_j X_p X_q) = \mathbb{E}(X_i X_j) \mathbb{E}(X_p X_q) + \mathbb{E}(X_i X_p) \mathbb{E}(X_j X_q) + \mathbb{E}(X_i X_q) \mathbb{E}(X_j X_p).$$

El primer sumando en el segundo miembro de la igualdad anterior es nulo. Veamos qué ocurre con los otros dos sumandos.

- Supongamos  $p \neq i$ . En ese caso  $\mathbb{E}(X_i X_p) = 0$  y el segundo sumando es nulo. Si  $p < i$ , como  $i < j$ , entonces  $p < j$  y en ese caso,  $\mathbb{E}(X_j X_p) = 0$  y el tercer sumando es también nulo. Por otra parte, si  $i < p$ , como  $p < q$ , resulta  $i < q$  y entonces  $\mathbb{E}(X_i X_q) = 0$  y el tercer sumando es nulo.
- Supongamos  $q \neq j$ . En ese caso  $\mathbb{E}(X_j X_q) = 0$  y el segundo sumando es nulo. Si  $q < j$ , como  $p < q$ , entonces  $p < j$  y en ese caso,  $\mathbb{E}(X_j X_p) = 0$  y el tercer sumando es también nulo. Por otra parte, si  $j < q$ , como  $i < j$ , resulta  $i < q$  y entonces  $\mathbb{E}(X_i X_q) = 0$  y el tercer sumando es nulo.

En síntesis, si  $p \neq i$  o si  $q \neq j$ , se tiene  $\mathbb{E}(X_i X_j X_p X_q) = 0$ . Así, la suma sobre  $p < q$  en (5.14) puede reducirse al caso  $p = i$  y  $q = j$ , por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \|I_2(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 4 \sum_{i < j} a_{i,j}^2 \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) \\ &= 4 \sum_{i < j} a_{i,j}^2 (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \\ &= 2 \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \\ &= 2 \int_a^b \int_a^b f(t, s)^2 dt ds \end{aligned}$$

y queda así probada la igualdad (5.13) en el caso  $f = \hat{f}$ . El caso general es consecuencia de lo antes probado y de la Proposición 5.4.8. □

El proceso de construcción de la integral doble de Wiener-Itô para funciones de cuadrado integrable en  $[a, b]^2$  se completa mediante un procedimiento de aproximación por las ya definidas integrales de funciones de  $\mathcal{O}_2$ . El siguiente resultado es crucial.

**Proposición 5.4.10.** *El espacio  $\mathcal{O}_2$  es denso en  $L^2([a, b]^2)$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in L^2([a, b]^2)$ . Vamos a obtener una sucesión  $(f_n)_n$  en  $\mathcal{O}_2$  tal que

$$\lim_n \|f_n - f\|_{L^2([a, b]^2)} = 0. \quad (5.15)$$

Para cada  $\delta > 0$ , sea  $D_\delta := \{p \in [a, b]^2 : d(p, D) < \delta\}$ , donde  $d$  es la métrica usual en el plano y  $D$  es como en (5.9). Dado  $\varepsilon > 0$ , es posible hallar  $\delta$  suficientemente pequeño para que  $\iint_{D_\delta} f(t, s)^2 dt ds < \varepsilon/2$ .

En el complemento de  $D_\delta$ ,  $f$  puede aproximarse en media cuadrática mediante funciones escalonadas. Sea entonces  $f_n = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{R_k}$  donde cada  $R_k$  es un rectángulo incluido en  $[a, b]^2 \setminus D_\delta$ , con  $n$  elegido suficientemente grande para que resulte  $\iint_{[a, b]^2 \setminus D_\delta} |f(t, s) - f_n(t, s)|^2 dt ds < \varepsilon/2$ . Basta sumar las dos desigualdades obtenidas antes para obtener (5.15). □

Hasta ahora, hemos definido  $I_2(f)$  para funciones en  $\mathcal{O}_2$  y sabemos que toda  $f \in L^2([a, b])$  puede aproximarse por una sucesión  $\{f_n\}_n$  de funciones en  $\mathcal{O}_2$ . Por otra parte, como consecuencia de (5.11) y de la Proposición 5.4.9, se tiene que

$$\|I_2(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2([a, b]^2)}^2.$$

Luego,

$$\|I_2(f_n) - I_2(f_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \left\| \widehat{f_n} - \widehat{f_m} \right\|_{L^2([a, b]^2)}^2 \leq 2 \|f_n - f_m\|_{L^2([a, b]^2)}^2 \xrightarrow{n} 0. \quad (5.16)$$

Por lo anterior, la sucesión  $(I_2(f_n))_n$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$  y por lo tanto convergente. Sea

$$I_2(f) = \lim_n I_2(f_n) \quad , \text{ en } L^2(\Omega). \quad (5.17)$$

Como se hizo en el caso de la integral simple, puede probarse que el límite anterior no depende de la elección de la sucesión, por lo que está bien definido.

**Definición 5.4.11.** Sea  $f \in L^2([a, b]^2)$ . Al límite definido en (5.17) lo llamamos *integral doble de Wiener-Itô* de  $f$ . Una notación usual para  $I_2(f)$  es la presentada en (5.8)

El siguiente resultado es consecuencia de las Proposiciones 5.4.8 y 5.4.9, usando la aproximación de la Proposición 5.4.10

**Proposición 5.4.12.** *Si  $f \in L^2([a, b]^2)$ , entonces*

1.  $I_2(f) = I_2(\widehat{f})$ .
2.  $\mathbb{E}(I_2(f)) = 0$ .
3.  $\|I_2(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2([a, b]^2)}^2$ .

El siguiente objetivo es introducir, para  $q \geq 1$ , la integral

$$I_q(f) = \int_{[a, b]^q} f(s_1, \dots, s_n) dB(s_1) \cdots dB(s_q) \quad (5.18)$$

para funciones  $f \in L^2([a, b]^q)$ , habiendo ya abordado los casos  $q = 1, 2$ . El procedimiento para la obtención de la nueva integral es similar al caso ya tratado por lo que se omitirán total o parcialmente las pruebas de los resultados que se darán, los que en algunos casos son los mismos salvo por la notación más pesada.

Sea  $D = \{(s_1, \dots, s_q) \in [a, b]^q : \exists i \neq j \text{ tal que } s_i = s_j\}$ . Las funciones a las que llamaremos *escalonadas* en  $[a, b]^q$  son las de la forma

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_q \leq k} a_{i_1, \dots, i_q} \mathbb{1}_{[s_{i_1-1}, s_{i_1}) \times \dots \times [s_{i_q-1}, s_{i_q})} \quad (5.19)$$

donde  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$ . La familia  $\mathcal{O}_q$  consiste en las de la forma (5.19), tales que  $a_{i_1, \dots, i_n} = 0$  si  $i_h = i_j$  para algún  $h \neq j$ . Se verifica que  $\mathcal{O}_q$  es un subespacio vectorial de  $L^2([a, b]^q)$ .

Si  $f \in \mathcal{O}_q$ , se define

$$I_q(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_q \leq k} a_{i_1, \dots, i_q} (B(s_{i_1}) - B(s_{i_1-1})) \cdots (B(s_{i_q}) - B(s_{i_q-1})). \quad (5.20)$$

Puede probarse que  $I_q(f)$  no depende de la representación de  $f$  dada en (5.19) y que el mapa  $I_q$  es lineal en  $\mathcal{O}_q$ . También, por la simetría de la medida de Lebesgue en  $[a, b]^q$ , se tiene

$$\int_{[a, b]^q} |f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)})|^2 ds_1 \cdots ds_q = \int_{[a, b]^q} |f(s_1, \dots, s_q)|^2 ds_1 \cdots ds_q$$

para toda  $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ . De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^2([a, b]^q)} &\leq \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \|f\|_{L^2([a, b]^q)} \\ &= \|f\|_{L^2([a, b]^q)}. \end{aligned}$$

Las prueba de los siguientes resultados siguen los mismos lineamientos que los vistos en las pruebas de la Proposiciones 5.4.8, 5.4.9 y 5.4.10, respectivamente.

**Proposición 5.4.13.** Si  $f \in \mathcal{O}_q$ , entonces  $I_q(f) = I_q(\widehat{f})$ .

**Proposición 5.4.14.** Si  $f \in \mathcal{O}_q$ , entonces  $\mathbb{E}(I_q(f)) = 0$  y

$$\|I_q(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = q! \|\widehat{f}\|_{L^2([a, b]^q)}^2$$

**Proposición 5.4.15.**  $\mathcal{O}_q$  es denso en  $L^2([a, b]^q)$ .

Estos resultados son los ingredientes esenciales para que podamos definir la integral (5.18). Debe verificarse, como en (5.16), que la sucesión  $(I_q(f_n))_n$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$  y definir

$$I_q(f) = \lim_n I_q(f_n), \text{ en } L^2(\Omega). \quad (5.21)$$

Este límite no depende de la elección de la sucesión  $(f_n)_{n \geq 0}$  utilizada para aproximar  $f$ .

**Definición 5.4.16.** Sea  $f \in L^2([a, b]^q)$ . El límite  $I_q(f)$  en (5.21) es llamado *integral múltiple de Wiener-Itô* de  $f$ . Es usual la notación presentada en (5.18).

También mediante la aproximación que da la Proposición 5.4.15, pueden probarse las siguientes propiedades de la integral múltiple de Wiener-Itô.

**Proposición 5.4.17.** Si  $f, g \in L^2([a, b]^q)$ , entonces

1.  $I_q(f) = I_q(\widehat{f})$ .
2.  $\mathbb{E}(I_q(f)) = 0$ .



$$3. \mathbb{E}(I_q(f)I_q(g)) = q! \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2([a,b]^q)}.$$

Además, si  $f \in L^2([a,b]^q)$  y  $g \in L^2([a,b]^p)$ , con  $p \neq q$ , entonces

$$4. \mathbb{E}(I_q(f)I_p(g)) = 0.$$

## 5.5. Obtención de una expansión de Hermite para el tiempo local

Algunos cálculos formales nos permiten obtener un posible acercamiento heurístico al desarrollo (2.22). Definamos la función  $A(t, x) = \frac{L_t(x)}{\phi(x)}$  y supongamos que  $A(t, \cdot) \in L^2(\phi(x) dx)$ . Si  $\omega \in \Omega$  es fijo y  $c_q$  es el  $q$ -ésimo coeficiente de Hermite de  $A$ , entonces,

$$\begin{aligned} c_q &= \frac{1}{q!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_t(x)}{\phi(x)} H_q(x) \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{q!} \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x) H_q(x) dx \\ &= \frac{1}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (2.7). Luego,

$$A(t, x) = \sum_{q \geq 0} c_q H_q(x) = \sum_{q \geq 0} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds,$$

de donde obtenemos

$$L_t(x) = \phi(x) \sum_{q \geq 0} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds. \quad (5.22)$$

Observemos que a partir de lo anterior se deduce que  $\mathbb{E}(L_t(x)) = t\phi(x)$ , como era esperable de acuerdo a (2.15). Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_t^2(x)] &= \phi^2(x) \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{q \geq 0} \frac{H_q(x)}{q!} \int_0^t H_q(X(s)) ds \right) \left( \sum_{q' \geq 0} \frac{H_{q'}(x)}{q'!} \int_0^t H_{q'}(X(s')) ds' \right) \right] \\ &= \phi^2(x) \sum_{q, q' \geq 0} \frac{H_q(x)}{q!} \frac{H_{q'}(x)}{q'!} \int_0^t \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}(H_q(X(s))H_{q'}(X(s')))}_{=\delta_{q,q'} q! r^q(s-s')} ds ds' \\ &= 2\phi^2(x) \sum_{q \geq 0} \frac{H_q^2(x)}{q!} \int_0^t (t-s) r^q(s) ds \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_0^t \frac{t-s}{\sqrt{1-r(s)}} ds, \end{aligned} \quad (5.23)$$

tal como en (2.16).

# Bibliografía

- [1] Robert J. Adler & Jonathan E. Taylor: *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. New York, 2015.
- [2] Robert J. Adler & Gregory Naitzat: *A central limit theorem for the Euler integral of a Gaussian random field*. Stochastic Processes and their Applications, vol 127, 2015.
- [3] Miguel A. Arcones: *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors*. Ann. Probab., vol 22: 2242-2274, 1994.
- [4] Jean-Marc Azaïs & Mario Wschebor: *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2009.
- [5] Omer Bobrowski & Matthew Strom Borman: *Euler integration of Gaussian random fields and persistent homology*. Journal of topology and Analysis, vol 4: 49-70, 2012.
- [6] Anne Estrade & José R. León. *A central limit theorem for the Euler characteristic of a Gaussian excursion set*. Ann. Probab., 44(6): 3849-3878, 2016.
- [7] Peter Imkeller; Víctor Pérez-Abreu; Josep Vives. *Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in  $\mathbb{R}^d$  and renormalizations*. Stoch. Process. Appl., vol 56, 1-34, 1995.
- [8] Svante Janson: *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997.
- [9] Marie F. Kratz & José R. León. *Hermite polynomial expansion for nonsmooth functionals of stationary Gaussian processes: crossings and extremes*. Stochastic Process. Appl., 66(2):237-252, 1997.
- [10] Marie F. Kratz & José R. León. *On the second moment of the number of crossings by a stationary Gaussian process*. Ann. Probab., 34(4):1601-1607, 2006.
- [11] Simeon Berman. *Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes*. Transactions of the American Mathematical Society, 137: 277-299, 1969.
- [12] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.
- [13] Harald Cràmer & M. R. Leadbetter. *Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1967.
- [14] Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd. edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1984.
- [15] Hui-Hsiung Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext (UTX), Springer, New York, 2006.
- [16] Ivan Nourdin. *Yet another proof of the Nualart-Peccati criterion*. Electron. Commun. Probab. 16 467 - 481, 2011. <https://doi.org/10.1214/ECP.v16-1642>.
- [17] Ivan Nourdin & Giovanni Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein's Method to Universality*. Cambridge University Press, New York, 2012.
- [18] David Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2nd. edition. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [19] David Nualart & Giovanni Peccati. *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals*. Ann. Probab. 33 (1) 177 - 193, January 2005.

- [20] David Pollard. *Convergence of stochastic processes*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [21] Albert Nikolaevich Shiryaev. *Probability*. Graduate Texts in Mathematics, vol 95. Springer, New York, 1996.
- [22] Mark Veraar. *The stochastic Fubini theorem revisited*. An International Journal of Probability and Stochastic Processes 84 (4) 543-551, 2011.

# Índice alfabético

- Campo
  - gaussiano, 12
  - vectorial gaussiano, 35
- Caos
  - de Wiener, 25
  - homogéneo, 25
  - polinomial, 25
- Característica de Euler, 78
  - modificada, 79
- Continuidad
  - en media cuadrática, 14
  - en probabilidad, 14
- Contracción, 24
- Densidad espectral, 32
- Derivada parcial de un campo gaussiano, 36
- Desigualdad de Arcones, 40
- Diferenciabilidad en media cuadrática, 15
- Distribución gaussiana conjunta, 11
- Espacio de Hilbert gaussiano, 11
- Espacio gaussiano, 11
- Fórmula
  - contador de Kac, 50
  - de Mehler, 31, 48
  - del área, 50
- Filtración, 96
- Función de covarianza, 14
  - de un proceso estacionario, 16
- Función simétrica, 23
- Integrabilidad uniforme, 98
- Integral de Euler, 78
- Integral múltiple
  - de Wiener, 24
  - de Wiener-Itô, 24
- Isotropía, 37
- Métrica bounded Lipschitz, 62
- Martingala, 96
- Medida
  - browniana, 13
  - espectral, 32
  - gaussiana, 13
  - compleja, 24
- Momento espectral, 32, 37
- Movimiento browniano, 14, 21
  - a valores complejos, 22
  - bilateral, 22
- MWI, 23
- Polinomio de Hermite, 17, 20
- Proceso
  - de Ornstein-Uhlenbeck, 33
  - estacionario, 16
  - estocástico, 12
    - adaptado, 96
  - gaussiano, 12
  - isonormal, 12
- Procesos estocásticos equivalentes, 16
- Producto tensorial, 24
- Promedio Móvil, 33
- Rango de Hermite, 39
- Representación espectral, 32
- Simetrización, 23
- TCL, 9
- Teorema
  - de Breuer-Major, 9
  - de convergencia de Vitali, 98
  - de Fubini estocástico, 64
  - de Wick, 102
  - de Ylvisaker, 52
- Tiempo de ocupación, 43
- Trayectoria, 12
- Variable gaussiana, 11
- Vector gaussiano, 11